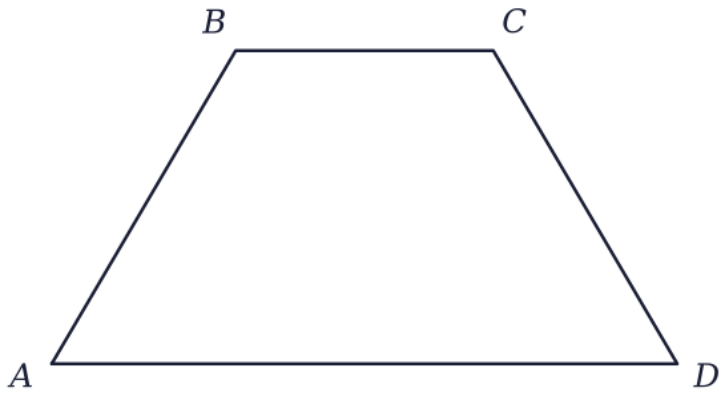
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 17 и 7 соответственно, а боковая сторона равна 13. Найдите площадь трапеции.



Ответ: 144

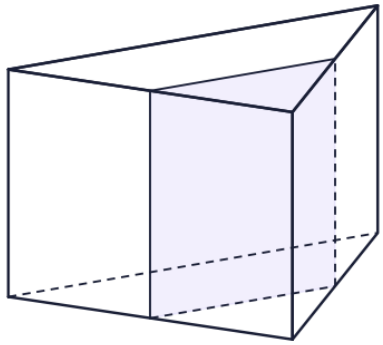
Решение. Проекция боковой стороны на большее основание равна $\dfrac{17-7}{2}=5$, высота $h=\sqrt{13^2-5^2}=12$, $S=\dfrac{17+7}{2}\cdot 12=144$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(5;\ -1)$ и $\vec{b}\,(4;\ -5)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Ответ: 25

Решение. $\vec{a}\cdot\vec{b}=5\cdot 4+(-1)\cdot(-5)=25$.

3 Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объём отсечённой треугольной призмы равен 40. Найдите объём исходной призмы.



Ответ: 160

Решение. Основание отсечённой призмы — треугольник, подобный основанию исходной с коэффициентом $\frac{1}{2}$, его площадь в 4 раза меньше. Высоты призм равны, поэтому объём исходной призмы в 4 раза больше: $4 \cdot 40 = 160$.

4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют 3 спортсмена из Финляндии, 7 спортсменов из Дании и 10 спортсменов из Швеции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Ответ: 0,5

Решение. Всего спортсменов $3 + 7 + 10 = 20$, $P = \frac{10}{20} = 0{,}5$.

5 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,2 для каждого автомата, автоматы работают независимо. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе закончится в обоих автоматах.

Ответ: 0,04

Решение. События независимы: $P = 0{,}2^2 = 0{,}04$.

6 Найдите корень уравнения $\log_2(15 - x) = 1$.

Ответ: 13

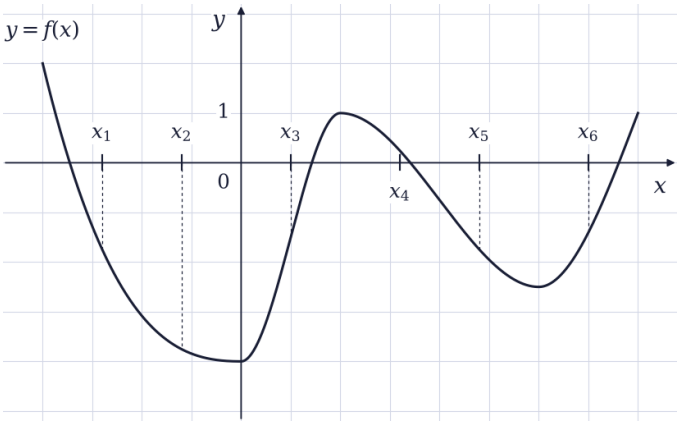
Решение. По определению логарифма $15 - x = 2^1 = 2$, откуда $x = 13$. Аргумент логарифма положителен.

7 Найдите значение выражения $(\sqrt{384}-\sqrt{486})(\sqrt{384}+\sqrt{486})$.

Ответ: -102

Решение. По формуле разности квадратов: $(\sqrt{384})^2-(\sqrt{486})^2=384-486=-102$.

8 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечено 6 точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Ответ: 4

Решение. Производная отрицательна в тех точках, где функция убывает. По графику таких точек 4.

9 Масса радиоактивного изотопа в образце уменьшается по закону $m(t)=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа (в мг), t — время, прошедшее от начального момента (в минутах), T — период полураспада (в минутах). Начальная масса изотопа $m_0=160$ мг, период полураспада $T=6$ мин. Через сколько минут масса изотопа станет равной 20 мг?

Ответ: 18

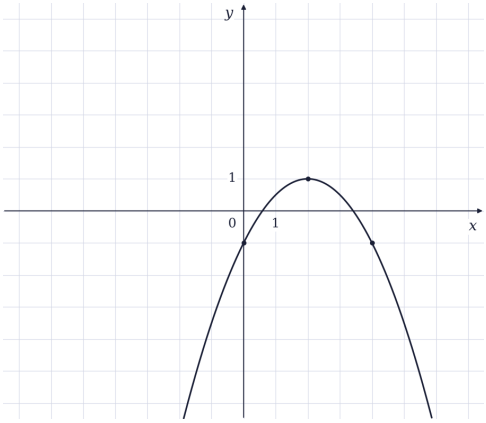
Решение. $160\cdot 2^{-t/6}=20 \iff 2^{-t/6}=2^{-3} \iff t=18$.

10 Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 60 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба?

Ответ: 10

Решение. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{60}{x}-\dfrac{60}{x+5}=2$, положительный корень $x=10$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите значение $f(10)$.



Ответ: -31

Решение. Вершина параболы — точка $(2;\ 1)$, поэтому $f(x) = a(x-2)^2 + 1$. По точке $(3;\ 1/2)$: $a = -0{,}5$. $f(10) = -0{,}5 \cdot (10-2)^2 + 1 = -31$.

12 Найдите наибольшее значение функции y = (x − 8)^3 − 243(x − 8) + 148 на отрезке [-10; 17].

Ответ: 1606

Решение. Производная y′ = 3((x − 8)^2 − 81); критические точки x = -1, x = 17. На концах отрезка y(-10) = -1310, y(17) = -1310. Во внутренней критической точке y(-1) = 1606. Наибольшее значение: 1606.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x - 7\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; **б)** $-\frac{11\pi}{6}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$, а $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

Уравнение принимает вид

$$\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 7\sin x = 4 \iff 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0.$$

Отсюда $\sin x = \dfrac{1}{2}$ или $\sin x = 3$. Уравнение $\sin x = 3$ корней не имеет, так как $|3| > 1$.

Если $\sin x = \dfrac{1}{2}$, то $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, или $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\dfrac{3\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$-3\pi \leqslant \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant -\dfrac{3\pi}{2} \iff -\dfrac{19}{12} \leqslant k \leqslant -\dfrac{5}{6}$, $k \in \{-1\}$: $x = -\dfrac{11\pi}{6}$.

$-3\pi \leqslant \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant -\dfrac{3\pi}{2} \iff -\dfrac{23}{12} \leqslant n \leqslant -\dfrac{7}{6}$: целых решений нет.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{11\pi}{6}$.

14

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны $AB=3$, $AD=4$, $AA_1=12$. Плоскость проходит через B, D и A_1.

а) Докажите, что сечение — треугольник BDA_1.

б) Найдите расстояние от C_1 до плоскости сечения.

Ответ: б) 24/√26

Решение. а) Положим A=(0,0,0), B=(3,0,0), D=(0,4,0), A_1=(0,0,12). Плоскость BDA_1 имеет уравнение 4x+3y+z=12. В параллелепипеде x,y,z≥0; точки плоскости с неотрицательными координатами образуют выпуклую оболочку B,D,A_1, и другие рёбра эта плоскость не пересекает.

б) C_1=(3,4,12). Расстояние до плоскости равно $|4\cdot3+3\cdot4+12-12|/\sqrt{4^2+3^2+1}=24/\sqrt{26}$.

15

Решите неравенство

$$\frac{4^x - 6\cdot 2^{x+1} + 32}{\log_3(x)} \geqslant 0.$$

Ответ: $(1;\ 2] \cup [3;\ +\infty)$

Решение. Область допустимых значений: $x > 0$ и $\log_3(x)\ /\ 0$, то есть $x > 0,\ x\ /\ 1.=$ $6\cdot 2^{x+1} = 12\cdot 2^x$, числитель раскладывается на множители: $4^x - 12\cdot 2^x + 32 = (2^x - 4)(2^x - 8)$.

Функции $y = 2^t$ и $y = \log_3 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак $2^x - 4$ совпадает со знаком $x - 2$, знак $2^x - 8$ — со знаком $x - 3$, знак $\log_3(x) = \log_3(x) - \log_3 1$ — со знаком $x - 1$.

Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x-1} \geqslant 0, \quad x > 0.$$

Метод интервалов: на $(0;\ 1)$ дробь отрицательна; на $(1;\ 2)$ дробь положительна; на $(2;\ 3)$ дробь отрицательна; на $(3;\ +\infty)$ дробь положительна; в точках $x = 2$, $x = 3$ числитель равен нулю.

Ответ: $(1;\ 2] \cup [3;\ +\infty)$.

16 Вклад 2 млн руб. на 3 года. Банк А каждый год начисляет 10 %. Банк Б в первый год ничего не начисляет, а в конце второго и третьего года — по 15 %. В каком банке через 3 года сумма будет больше и на сколько рублей?

Ответ: в банке А, на 17 000 руб.

Решение. А: $2 \cdot 1{,}331 = 2{,}662$ млн. Б: $2 \cdot 1{,}15^2 = 2{,}645$ млн. Разность $0{,}017$ млн руб., больше в банке А.

17 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD.

а) Докажите, что $AB = 2AD$.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AD = \dfrac{17}{2}$, $AK = 15$.

Ответ: б) 120

Решение. а) Прямые AB и CD параллельны, поэтому $\angle AKD = \angle KAB$ как накрест лежащие углы. AK — биссектриса, поэтому $\angle KAB = \angle KAD$. Значит, $\angle AKD = \angle KAD$, и треугольник ADK равнобедренный: $DK = AD$. Аналогично треугольник BCK равнобедренный: $CK = BC = AD$. Тогда $AB = CD = DK + KC = 2AD$.
б) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к стороне AB, равна 180°, поэтому $\angle KAB + \angle KBA = 90^\circ$ и $\angle AKB = 90^\circ$. Треугольник ABK и параллелограмм имеют общее основание AB и одинаковую высоту (расстояние между прямыми AB и CD), поэтому $S_{ABCD} = 2S_{ABK} = AK \cdot BK$. По пункту а) $AB = 2AD = 17$. Из прямоугольного треугольника ABK: $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$. $S_{ABCD} = 15 \cdot 8 = 120$.
Ответ: б) 120.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений |y| = x+a; $x^2+y^2 = 1$ имеет ровно четыре различных решения (x; y).

Ответ: a ∈ (1; √2)

Решение. Положим s=|y|≥0, тогда x=s−a. Условие окружности даёт 2s²−2as+a²−1=0. Каждому положительному корню s соответствуют две точки с y=±s, а s=0 даёт одну. Четыре решения возникают ровно при двух различных положительных корнях. Дискриминант по s равен 4(2−a²), сумма корней равна a, произведение равно (a²−1)/2. Требуются a²<2, a>0, a²>1, что вместе даёт 1<a<√2.

19 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по два, по три и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если число встречается несколько раз, на доске оставляют одно такое число. Например, если задуманы числа $1, 2, 2$, на доске будет набор $1, 2, 3, 4, 5$.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет набор $2, 5, 7, 9, 11, 14, 16$.

б) Существует ли пример задуманных чисел, для которых на доске будет набор $1, 2, 4, 5, 6, 8$?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет набор $3, 5, 6, 8, 9, 11, 14$.

Ответ: а) $2, 5, 9$**; б) нет; в)** $3, 5, 6$ **и** $3, 3, 3, 5$

Решение. Наименьшее число на доске — наименьшее задуманное, наибольшее — сумма всех задуманных. б) Задумано 1, сумма всех равна 8. Если 2 задумано, на доске было бы $1 + 2 = 3$. Иначе $2 = 1 + 1$, единиц ровно две (три дали бы 3), остальные задуманные числа не меньше 4, и 4 задумано (иначе его не получить). Тогда сумма $1 + 1 + 4 = 6$, и оставшиеся числа (каждое не меньше 4) дают в сумме 2 — противоречие. в) Задуманы 3 и 5 (сумм, равных 5, из чисел не меньше 3 нет), сумма остальных $14 - 8 = 6$, все они не меньше 3: это 6 или $3, 3$. Оба набора дают нужную запись.