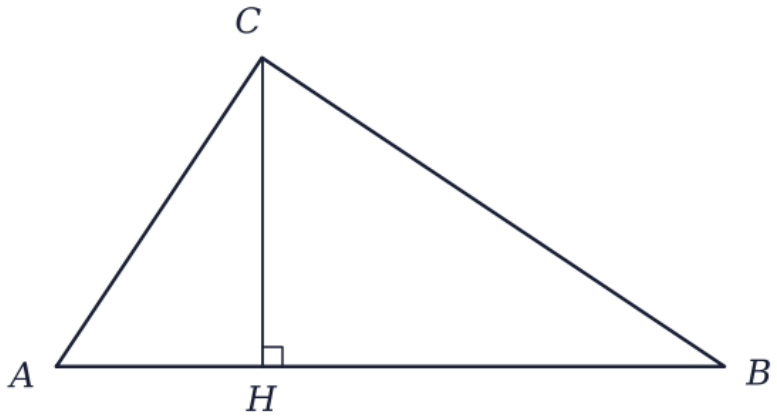
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AH = 12$, $BH = 27$. Найдите CH.



Ответ: 18

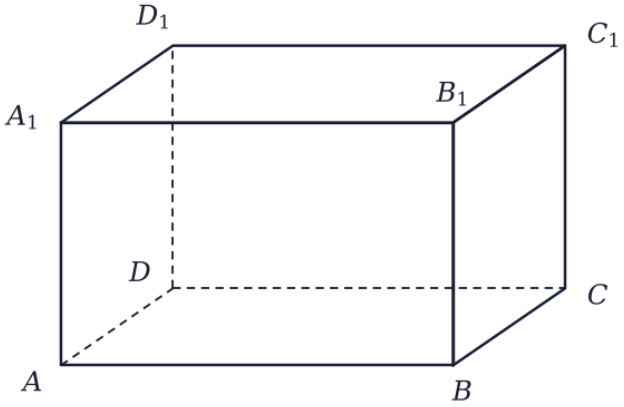
Решение. Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, есть среднее пропорциональное отрезков гипотенузы: $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{12 \cdot 27} = 18$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(2;\ -5)$ и $\vec{b}\,(1;\ 4)$. Найдите длину вектора $4\vec{a} - \vec{b}$.

Ответ: 25

Решение. $4\vec{a} - \vec{b} = (7;\ -24)$, $|4\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{49 + 576} = 25$.

3 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 10$, $BC = 11$, $AA_1 = 2$. Найдите объём треугольной призмы $ABDA_1B_1D_1$.



Ответ: 110

Решение. Основание призмы — треугольник ABD площадью $\dfrac{10\cdot 11}{2}$, высота $AA_1=2$. $V=\dfrac{10\cdot 11}{2}\cdot 2=110$.

4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют 6 спортсменов из Финляндии, 7 спортсменов из Дании и 12 спортсменов из Швеции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Ответ: 0,48

Решение. Всего спортсменов $6+7+12=25$, $P=\dfrac{12}{25}=0{,}48$.

5 Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 60% этих стёкол, вторая — 40%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стёкол, а вторая — 5%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ: 0,038

Решение. По формуле полной вероятности: $P=0{,}6\cdot 0{,}03+0{,}4\cdot 0{,}05=0{,}038$.

6 Найдите корень уравнения $\sqrt{53-4x}=3$.

Ответ: 11

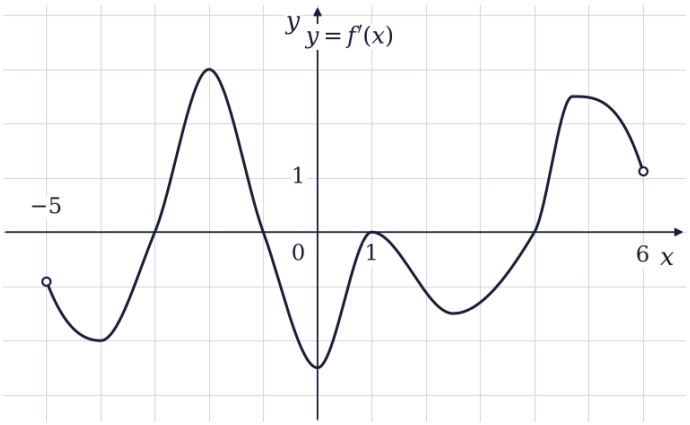
Решение. Возведём обе части в квадрат: $53-4x=9$, $4x=44$, $x=11$.

7 Найдите значение выражения $(\sqrt{384}-\sqrt{294})(\sqrt{384}+\sqrt{294})$.

Ответ: 90

Решение. По формуле разности квадратов: $(\sqrt{384})^2-(\sqrt{294})^2=384-294=90$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 6)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 3

Решение. Точки экстремума — нули производной, в которых она меняет знак: $-3;\ -1;\ 4$. В точке 1 график f' касается оси абсцисс без смены знака, это не экстремум. Всего 3.

9 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 9t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 4 метров?

Ответ: 0,2

Решение. $h(t) \geqslant 4 \iff 5t^2 - 9t + 4 \leqslant 0 \iff 0{,}8 \leqslant t \leqslant 1$. Мяч находится не ниже 4 м в течение $1 - 0{,}8 = 0{,}2$ с.

10 Смешав 45-процентный и 50-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 39-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 90-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 57-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 45-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: 10

Решение. Пусть x кг — масса 45-процентного раствора, y кг — 50-процентного. Тогда $0{,}45x + 0{,}5y = 0{,}39(x + y + 10)$ и $0{,}45x + 0{,}5y + 9 = 0{,}57(x + y + 10)$. Вычитая, получим $x + y + 10 = 50$, откуда $x = 10$, $y = 30$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(36)$.



Ответ: -6

Решение. График проходит через точку $(9;\ -3)$: $-3 = k\sqrt{9}$, $k = -1$. $f(36) = -1 \cdot \sqrt{36} = -6$.

12 Найдите точку максимума функции y = 9ln x − x + 145.

Ответ: 9

Решение. Область определения: x > 0. Производная y′ = 9/x − 1. Она положительна при 0 < x < 9 и отрицательна при x > 9. Точка максимума x = 9.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $2\cos 2x - 8\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; **б)** $\frac{17\pi}{6}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$, а $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

Уравнение принимает вид

$$2\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 8\sin x = 5 \iff 4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0.$$

Отсюда $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = 1{,}5$. Уравнение $\sin x = 1{,}5$ корней не имеет, так как $|1{,}5| > 1$.

Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$\dfrac{5\pi}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant 4\pi \iff \dfrac{7}{6} \leqslant k \leqslant \dfrac{23}{12}$: целых решений нет.

$\dfrac{5\pi}{2} \leqslant \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant 4\pi \iff \dfrac{5}{6} \leqslant n \leqslant \dfrac{19}{12}$, $n \in \{1\}$: $x = \dfrac{17\pi}{6}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{17\pi}{6}$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 12, боковое ребро равно 10. Точка M — середина ребра SC.

а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости SAC.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BDM.

Ответ: б) $30\sqrt{2}$

Решение. а) Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Диагонали квадрата перпендикулярны: $BD \perp AC$. Пирамида правильная, поэтому её высота — отрезок SO, и $SO \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и SO плоскости SAC, значит, $BD \perp (SAC)$.

б) Плоскость BDM пересекает пирамиду по треугольнику BDM. Отрезок OM — средняя линия треугольника SAC: $OM = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{10}{2}$. Прямая OM лежит в плоскости SAC, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$, то есть OM — высота треугольника BDM. $BD = 12\sqrt{2}$, $S_{BDM} = \dfrac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} \cdot \dfrac{10}{2} = 30\sqrt{2}$.

Ответ: б) $30\sqrt{2}$.

15 Решите неравенство

$$\log_2^2 x - 4 \leqslant 0.$$

Ответ: $[0{,}25;\ 4]$

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Сделаем замену $t = \log_2 x$: $t^2 - 4 \leqslant 0 \iff (t+2)(t-2) \leqslant 0 \iff -2 \leqslant t \leqslant 2$.

Функция $y = \log_2 x$ возрастает, поэтому $-2 \leqslant \log_2 x \leqslant 2 \iff 0{,}25 \leqslant x \leqslant 4$.

Ответ: $[0{,}25;\ 4]$.

16 Вклад 1 млн руб. под 20 % годовых на 3 года. В конце первого и второго года после начисления процентов вкладчик снимает одну и ту же сумму X. В конце третьего года на счёте 1,2 млн руб. Найдите X.

Ответ: 200 000 руб.

Решение. $\big((1{,}2 - X) \cdot 1{,}2 - X\big) \cdot 1{,}2 = 1{,}728 - 2{,}64X = 1{,}2 \Rightarrow X = 0{,}2$ млн руб.

17 В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, CD — высота к гипотенузе AB; AC=5, BC=12.

а) Докажите $CD^2=AD\cdot DB$.

б) Найдите CD, AD и DB.

Ответ: б) CD=60/13, AD=25/13, DB=144/13

Решение. Треугольники ACD и CBD подобны по острому углу, поэтому CD/AD=DB/CD, откуда $CD^2=AD\cdot DB$. По Пифагору AB=13. По подобию $AC^2=AB\cdot AD$ и $BC^2=AB\cdot DB$, следовательно AD=25/13, DB=144/13. Из площадей $5\cdot 12/2=AB\cdot CD/2$ получаем CD=60/13.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+2a-1}+\sqrt{x-a}=1$ имеет хотя бы один действительный корень.

Ответ: $a\in[0;\,2/3]$

Решение. Обозначим $u=\sqrt{x-a}\geq 0$ и $v=\sqrt{x+2a-1}\geq 0$. Тогда $u+v=1$ и $v^2-u^2=3a-1$, откуда $v-u=3a-1$, $v=3a/2$, $u=(2-3a)/2$. Неотрицательность обоих чисел эквивалентна $0\leq a\leq 2/3$. Для каждого такого a число $x=a+u^2$ действительно удовлетворяет обеим исходным формулам: $x+2a-1=v^2$. Значит, условие достаточно.

19 Числа расставляют по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была простым числом.

а) Можно ли так расставить числа $1, 2, 3, 4, 5, 6$?

б) Можно ли так расставить числа $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$?

в) Какое наибольшее количество чисел из набора $1, 2, \ldots, 9$ можно выбрать и так расставить по кругу?

Ответ: а) да, например $1, 4, 3, 2, 5, 6$**; б) нет; в)** 8

Решение. а) Суммы соседних: $5, 7, 5, 7, 11, 7$. б) Сумма двух различных натуральных чисел не меньше 3, поэтому простая сумма нечётна: соседние числа разной чётности. Тогда чётные и нечётные числа по кругу чередуются, и их поровну. Среди $1, \ldots, 7$ нечётных 4, чётных 3. в) По той же причине выбрано поровну чётных и нечётных чисел, а чётных в наборе всего 4, поэтому чисел не больше 8. Пример: $1, 2, 3, 8, 5, 6, 7, 4$ (суммы $3, 5, 11, 13, 11, 13, 11, 5$).