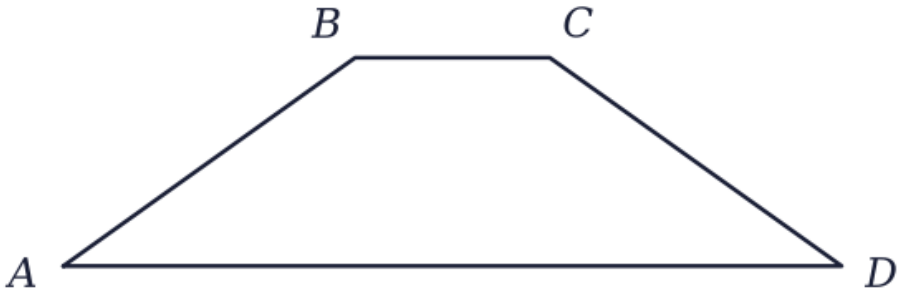
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 32 и 8 соответственно, а боковая сторона равна 13. Найдите площадь трапеции.



Ответ: 100

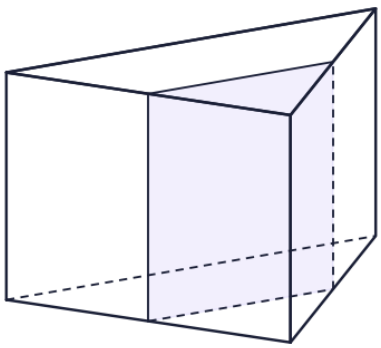
Решение. Проекция боковой стороны на большее основание равна $\dfrac{32-8}{2}=12$, высота $h=\sqrt{13^2-12^2}=5$, $S=\dfrac{32+8}{2}\cdot 5=100$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(5;\ 4)$ и $\vec{b}\,(-1;\ -4)$. Найдите длину вектора $4\vec{a}-\vec{b}$.

Ответ: 29

Решение. $4\vec{a}-\vec{b}=(21;\ 20)$, $|4\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{441+400}=29$.

3 Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 56. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Ответ: 28

Решение. Периметр основания отсечённой призмы вдвое меньше периметра основания исходной (стороны — средние линии и половины сторон), высоты равны. Поэтому площадь боковой поверхности вдвое меньше: $\dfrac{56}{2} = 28$.

4 В коробке лежат 32 одинаковых на вид чайных пакетиков: 3 пакетика с зелёным чаем, 23 — с белым, остальные — с чёрным. Найдите вероятность того, что случайно выбранный пакетик окажется с чёрным чаем.

Ответ: 0,1875

Решение. Пакетиков с чёрным чаем $32 - 3 - 23 = 6$; $P = \dfrac{6}{32} = 0{,}1875$.

5 Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,6, второго — 0,4. Найдите вероятность того, что в мишень попадёт ровно один стрелок.

Ответ: 0,52

Решение. Ровно одно попадание: первый попал, второй нет, или наоборот. $P = 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}52$.

6 Найдите корень уравнения $\log_5(4x + 5) = \log_5(x - 3) + 1$.

Ответ: 20

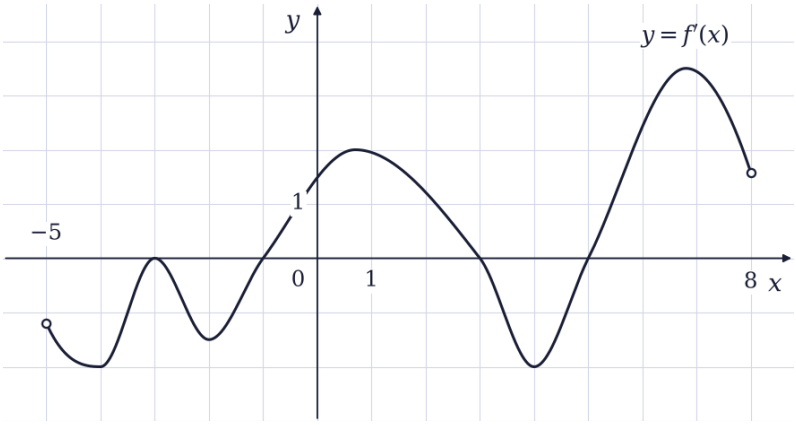
Решение. $1 = \log_5 5$, поэтому $4x + 5 = 5(x - 3)$, откуда $x = 20$; при этом значении оба аргумента логарифмов положительны.

7 Найдите значение выражения $5^{\log_{25} 121}$.

Ответ: 11

Решение. $\log_{25} 121 = \log_{5^2} 11^2 = \log_5 11$, поэтому выражение равно $5^{\log_5 11} = 11$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 8)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: 4

Решение. Функция возрастает там, где $f'(x) > 0$ (касание оси без смены знака промежуток не разрывает): $(-1;\ 3)$, $(5;\ 8)$. Наибольшая длина равна 4.

9 Масса радиоактивного изотопа в образце уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа (в мг), t — время, прошедшее от начального момента (в минутах), T — период полураспада (в минутах). Начальная масса изотопа $m_0 = 120$ мг, период полураспада $T = 10$ мин. Через сколько минут масса изотопа станет равной 3,75 мг?

Ответ: 50

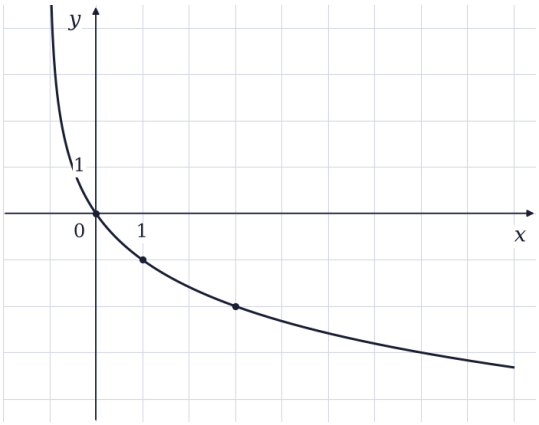
Решение. $120 \cdot 2^{-t/10} = 3{,}75 \iff 2^{-t/10} = 2^{-5} \iff t = 50$.

10 Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 210 литров она заполняет на 12 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: 5

Решение. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{210}{x} - \dfrac{210}{x+2} = 12$, положительный корень $x = 5$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = -\log_a(x+b)$. Найдите $f(15)$.



Ответ: -4

Решение. $\log_a(x+b) = 0$ при $x+b=1$; график пересекает ось абсцисс в точке $x=0$, поэтому $b=1$. По точке $(3;\ -2)$ находим $a=2$. $f(15) = -\log_2 16 = -4$.

12 Найдите точку максимума функции $y = x^2e^{9-x}$ на промежутке $(0;\ +\infty)$.

Ответ: 2

Решение. Производная $y' = e^{9-x}x(2-x)$. При $0 < x < 2$ она положительна, при $x > 2$ отрицательна. Значит, точка максимума $x = 2$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $2\cos^2 x + 3\sin(\pi + x) = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$**; б)** $\pi;\ 2\pi$

Решение. а) По формуле приведения $\sin(\pi + x) = -\sin x$, а $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$2\left(1 - \sin^2 x\right) - 3\sin x = 2 \iff 2\sin^2 x + 3\sin x = 0.$$

Отсюда $\sin x = 0$ или $\sin x = -1{,}5$. Уравнение $\sin x = -1{,}5$ корней не имеет, так как $|-1{,}5| > 1$.

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$\pi \leqslant \pi k \leqslant \dfrac{5\pi}{2} \iff 1 \leqslant k \leqslant \dfrac{5}{2}, k \in \{1, 2\}$: $x = \pi, x = 2\pi$.

Ответ: а) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) π; 2π.

14

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро равно 6.

а) Докажите, что диагональ AC перпендикулярна плоскости BB_1D_1.

б) Найдите расстояние от A до этой плоскости.

Ответ: б) 3√2

Решение. В координатах A=(0,0,0), B=(6,0,0), D=(0,6,0), B_1=(6,0,6), D_1=(0,6,6). Направление AC=(6,6,0) перпендикулярно BB_1=(0,0,6) и BD_1=(−6,6,6); эти прямые пересекаются в B и лежат в искомой плоскости. Поэтому $AC \perp (BB_1D_1)$. Уравнение плоскости x+y=6; расстояние от A=(0,0,0) равно 6/√2=3√2.

15

Решите неравенство

$$\frac{4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16}{\log_5(x+2)} \leqslant 0.$$

Ответ: $(-2;\ -1) \cup [1;\ 3]$

Решение. Область допустимых значений: $x + 2 > 0$ и $\log_5(x+2) \neq 0$, то~есть $x > -2$, $x \neq -1$.

$5 \cdot 2^{x+1} = 10 \cdot 2^x$, числитель раскладывается на множители: $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = (2^x - 2)(2^x - 8)$.

Функции $y = 2^t$ и $y = \log_5 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак $2^x - 2$ совпадает со знаком $x - 1$, знак $2^x - 8$ — со знаком $x - 3$, знак $\log_5(x+2) = \log_5(x+2) - \log_5 1$ — со знаком $x + 1$. Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{(x-1)(x-3)}{x+1} \leqslant 0, \quad x > -2.$$

Метод интервалов: на $(-2;\ -1)$ дробь отрицательна; на $(-1;\ 1)$ дробь положительна; на $(1;\ 3)$ дробь отрицательна; на $(3;\ +\infty)$ дробь положительна; в точках $x = 1$, $x = 3$ числитель равен нулю.

Ответ: $(-2;\ -1) \cup [1;\ 3]$.

16

Кредит на 3 года под 20 % (стандартная схема) погашается тремя равными платежами, каждый не больше 2 592 000 руб. Найдите наибольшую возможную сумму кредита.

Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 5 460 000 руб.

Решение. $S = \dfrac{X(q^3-1)}{q^3(q-1)} = \dfrac{2{,}592 \cdot 0{,}728}{1{,}728 \cdot 0{,}2} = 1{,}5 \cdot 3{,}64 = 5{,}46$ млн руб.

17 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD.

а) Докажите, что $AB = 2AD$.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AK = 6$, $BK = 8$.

Ответ: б) 48

Решение. а) Прямые AB и CD параллельны, поэтому $\angle AKD = \angle KAB$ как накрест лежащие углы. AK — биссектриса, поэтому $\angle KAB = \angle KAD$. Значит, $\angle AKD = \angle KAD$, и треугольник ADK равнобедренный: $DK = AD$. Аналогично треугольник BCK равнобедренный: $CK = BC = AD$. Тогда $AB = CD = DK + KC = 2AD$.

б) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к стороне AB, равна 180°, поэтому $\angle KAB + \angle KBA = 90^\circ$ и $\angle AKB = 90^\circ$. Треугольник ABK и параллелограмм имеют общее основание AB и одинаковую высоту (расстояние между прямыми AB и CD), поэтому $S_{ABCD} = 2S_{ABK} = AK \cdot BK$. $S_{ABCD} = 6 \cdot 8 = 48$.

Ответ: б) 48.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $|x^2 - 2x + a| \le 5$ выполняется при всех $x \in [-1; 2]$.

Ответ: a ∈ [−4; 2]

Решение. Функция $g(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$ принимает на $[-1;2]$ все значения от -1 до 3. Поэтому выражение $g(x)+a$ принимает все значения из $[a-1;a+3]$. Весь этот отрезок должен содержаться в $[-5;5]$. Получаем $a-1\ge-5$ и $a+3\le5$, то есть $-4\le a\le2$.

19 Имеется 15 камней массами $1, 2, 3, \ldots, 15$ кг.

а) Можно ли разложить камни на 4 кучки равной массы?

б) Можно ли разложить камни на 10 кучек равной массы?

в) На какое наибольшее количество кучек равной массы можно разложить эти камни?

Ответ: а) да; б) нет; в) 8

Решение. Общая масса 120 кг. а) $15 + 14 + 1 = 13 + 12 + 5 = 11 + 10 + 9 = 8 + 7 + 6 + 4 + 3 + 2 = 30$. б) Масса каждой кучки была бы 12 кг, но кучка с камнем 15 кг тяжелее. в) Кучка с камнем 15 кг весит не меньше 15 кг, все кучки равны, поэтому их не больше $\dfrac{120}{15} = 8$. Пример: 15, $14 + 1$, $13 + 2$, $12 + 3$, $11 + 4$, $10 + 5$, $9 + 6$, $8 + 7$.