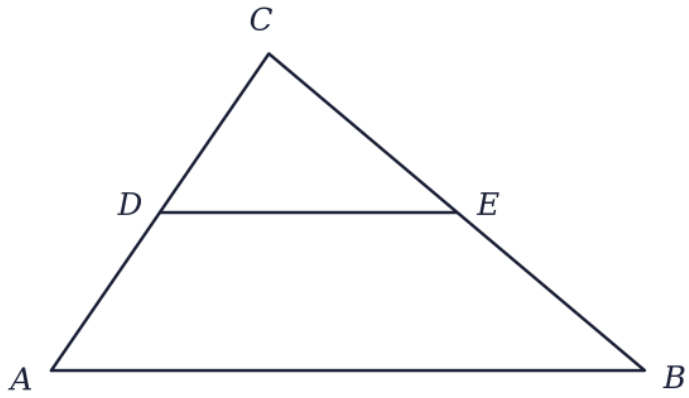
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 Площадь треугольника ABC равна 96, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



Ответ: 72

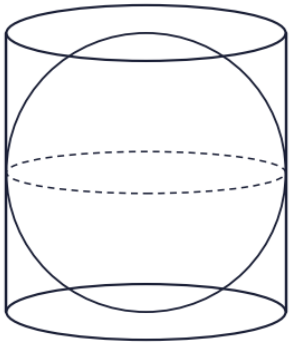
Решение. Треугольник CDE подобен треугольнику CAB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, его площадь $\frac{96}{4} = 24$. Площадь трапеции: $96 - 24 = 72$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(-1;\ -3)$ и $\vec{b}\,(-1;\ 2)$. Найдите длину вектора $4\vec{a} + 2\vec{b}$.

Ответ: 10

Решение. $4\vec{a} + 2\vec{b} = (-6;\ -8)$, $|4\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{36 + 64} = 10$.

3 В цилиндр вписан шар: шар касается обоих оснований цилиндра и его боковой поверхности. Объём цилиндра равен 120. Найдите объём шара.



Ответ: 80

Решение. Высота цилиндра равна диаметру шара: $V_{\text{цил}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 120$, откуда $\pi r^3 = 60$; $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 80$.

4 В среднем из 1000 блендеров, поступивших в продажу, 21 неисправны. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля прибор исправен.

Ответ: 0,979

Решение. $P = \dfrac{1000 - 21}{1000} = 0{,}979$.

5 Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 40% этих стёкол, вторая — 60%. Первая фабрика выпускает 4% бракованных стёкол, а вторая — 5%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ: 0,046

Решение. По формуле полной вероятности: $P = 0{,}4 \cdot 0{,}04 + 0{,}6 \cdot 0{,}05 = 0{,}046$.

6 Найдите корень уравнения $\log_4(86 - x) = 3$.

Ответ: 22

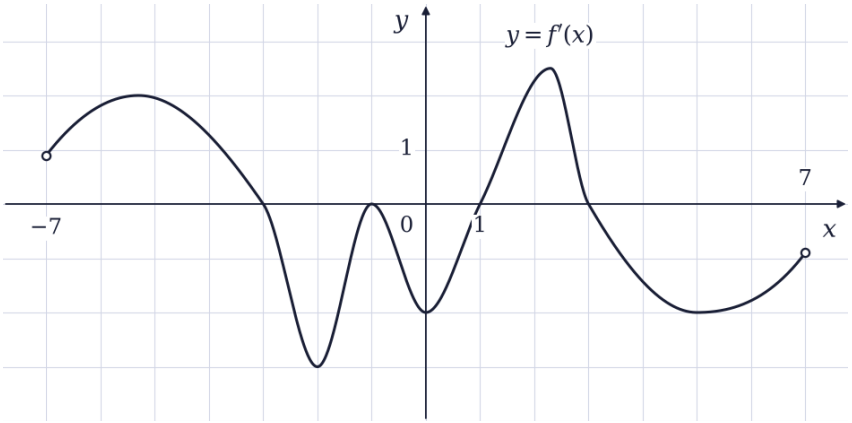
Решение. По определению логарифма $86 - x = 4^3 = 64$, откуда $x = 22$. Аргумент логарифма положителен.

7 Найдите значение выражения $\log_{0,8} 25 - \log_{0,8} 20$.

Ответ: -1

Решение. $\log_{0,8} 25 - \log_{0,8} 20 = \log_{0,8} \dfrac{25}{20} = \log_{0,8} 1{,}25 = -1$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7;\ 7)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 1

Решение. В точке минимума производная меняет знак с «−» на «+». Такая точка одна: $x = 1$.

9 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 4 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 3 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 12$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 8,4 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: 6

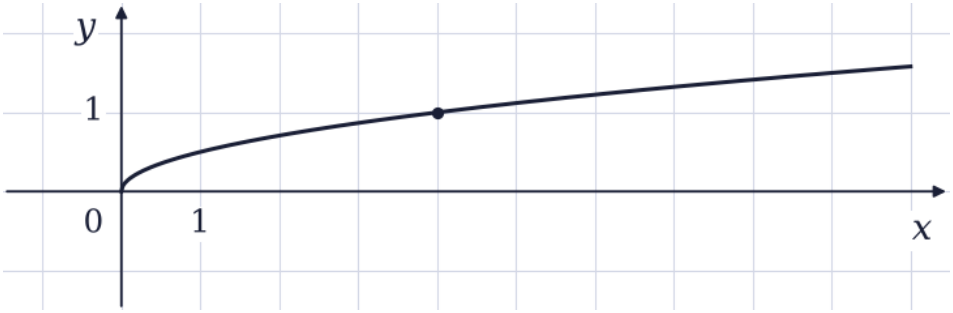
Решение. $RC = 3 \cdot 10^{6} \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 12$. $8{,}4 = 0{,}7 \cdot 12 \cdot \log_2 \dfrac{12}{U}$, откуда $\log_2 \dfrac{12}{U} = 1$, $U = \dfrac{12}{2} = 6$.

10 Первая труба пропускает на 3 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 180 литров она заполняет на 5 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: 9

Решение. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{180}{x} - \dfrac{180}{x+3} = 5$, положительный корень $x = 9$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(121)$.



Ответ: 5,5

Решение. График проходит через точку $(4;\ 1)$: $1 = k\sqrt{4}$, $k = 0{,}5$. $f(121) = 0{,}5 \cdot \sqrt{121} = 5{,}5$.

12 Найдите наименьшее значение функции y = x + 81/x + 139 на отрезке [4,5; 27].

Ответ: 157

Решение. На отрезке x > 0. Производная y′ = 1 − 81/x^2 отрицательна при x < 9 и положительна при x > 9. Минимум достигается при x = 9; y(9) = 9 + 9 + 139 = 157.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x + 6\cos(\pi - x) = -1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$**; б)** $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos(\pi - x) = -\cos x$, а $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Уравнение принимает вид

$$\left(2\cos^2 x - 1\right) - 6\cos x = -1 \iff \cos^2 x - 3\cos x = 0.$$

Отсюда $\cos x = 0$ или $\cos x = 3$. Уравнение $\cos x = 3$ корней не имеет, так как $|3| > 1$. Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi k \leqslant \pi \iff -1 \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}$, $k \in \{-1, 0\}$: $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 6 на ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости ACC_1.

б) Найдите угол между плоскостью BDM и плоскостью $ABCD$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Решение. а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD \perp AC$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1 \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, значит, $BD \perp (ACC_1)$. Плоскость BDM проходит через прямую BD, перпендикулярную плоскости ACC_1, поэтому плоскости BDM и ACC_1 перпендикулярны.

б) Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Прямая OM лежит в плоскости ACC_1, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$; кроме того, $OC \perp BD$. Значит, $\angle MOC$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями BDM и $ABCD$. $OC = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, $CM = 2$, $\operatorname{tg}\angle MOC = \dfrac{CM}{OC} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

15 Решите неравенство

$$\log_2^2 x - 2\log_2 x \leqslant 0.$$

Ответ: $[1;\,4]$

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Сделаем замену $t = \log_2 x$: $t^2 - 2t \leqslant 0 \iff t(t-2) \leqslant 0 \iff 0 \leqslant t \leqslant 2$.

Функция $y = \log_2 x$ возрастает, поэтому $0 \leqslant \log_2 x \leqslant 2 \iff 1 \leqslant x \leqslant 4$.

Ответ: $[1;\,4]$.

16 Кредит 2,5 млн руб. на 2 года погашается двумя равными платежами. В первый январь долг вырос на 10 %, во второй — на 20 %. Найдите размер платежа.

Ответ: 1 500 000 руб.

Решение. $(2{,}5 \cdot 1{,}1 - X) \cdot 1{,}2 = X \Rightarrow 3{,}3 = 2{,}2X \Rightarrow X = 1{,}5$ млн руб.

17 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD.

а) Докажите, что $AB = 2AD$.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AD = \dfrac{17}{2}$, $AK = 8$.

Ответ: б) 120

Решение. а) Прямые AB и CD параллельны, поэтому $\angle AKD = \angle KAB$ как накрест лежащие углы. AK — биссектриса, поэтому $\angle KAB = \angle KAD$. Значит, $\angle AKD = \angle KAD$, и треугольник ADK равнобедренный: $DK = AD$. Аналогично треугольник BCK равнобедренный: $CK = BC = AD$. Тогда $AB = CD = DK + KC = 2AD$.
б) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к стороне AB, равна 180°, поэтому $\angle KAB + \angle KBA = 90^\circ$ и $\angle AKB = 90^\circ$. Треугольник ABK и параллелограмм имеют общее основание AB и одинаковую высоту (расстояние между прямыми AB и CD), поэтому $S_{ABCD} = 2S_{ABK} = AK \cdot BK$. По пункту а) $AB = 2AD = 17$. Из прямоугольного треугольника ABK: $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$. $S_{ABCD} = 8 \cdot 15 = 120$.
Ответ: б) 120.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение √(x−a)·(2cos x−1) = 0 имеет ровно два корня на отрезке [0; 2π].

Ответ: a ∈ (−∞; 0) ∪ [π/3; 5π/3)

Решение. Требуется x≥a. Корни второго множителя на [0;2π] равны π/3 и 5π/3, если они входят в область определения. Ещё возможен корень x=a, когда a∈[0;2π]. При a<0 остаются оба тригонометрических корня. При 0≤a<π/3 их три. При a=π/3 первый совпадает с x=a; до 5π/3 остаются два. При a=5π/3 они совпадают и остаётся один. При больших a двух корней уже нет.

19 Из чисел $1, 2, 3, \ldots, 20$ выбирают несколько различных так, чтобы сумма никаких двух выбранных чисел не делилась на 7.
а) Можно ли выбрать 9 чисел, среди которых есть 1 и 2?
б) Можно ли выбрать 10 чисел, среди которых ровно два чётных?
в) Какую наибольшую сумму могут иметь выбранные числа?

Ответ: а) да, например $1, 2, 3, 8, 9, 10, 15, 16, 17$**; б) нет; в)** 122

Решение. Числа с остатком r при делении на 7 ($r = 1, \ldots, 6$): r, $r + 7$, $r + 14$; делятся на 7 числа 7 и 14. Нельзя брать одновременно числа с остатками r и $7 - r$ и два числа, кратных 7. а) Остатки $1, 2, 3$ попарно в сумме не дают 0. б) Из каждой пары классов $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$ берутся числа одного класса (не больше трёх), кратных 7 — не больше одного, всего не больше 10. При 10 числах взяты три класса целиком. В классе с нечётным r одно чётное число ($r + 7$), с чётным r — два, поэтому чётных не меньше трёх. в) Сумма класса r равна $3r + 21$; из каждой пары выгоднее класс с большим r: $39 + 36 + 33$, плюс 14. Итого 122:
$4, 5, 6, 11, 12, 13, 14, 18, 19, 20$.