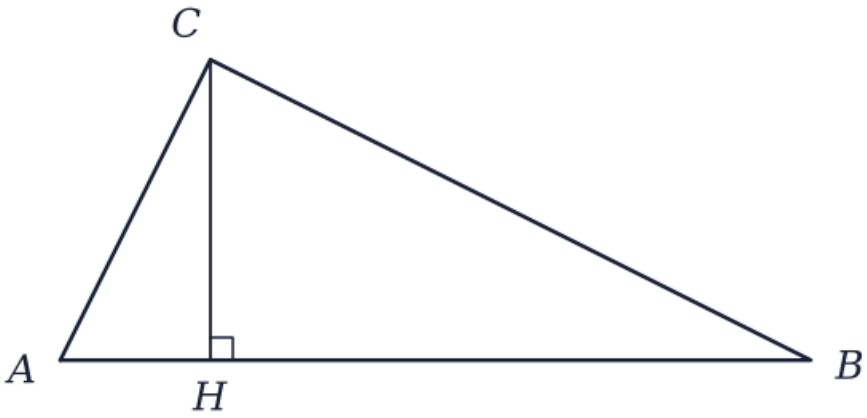
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AH = 4$, $BH = 16$. Найдите CH.



Ответ: 8

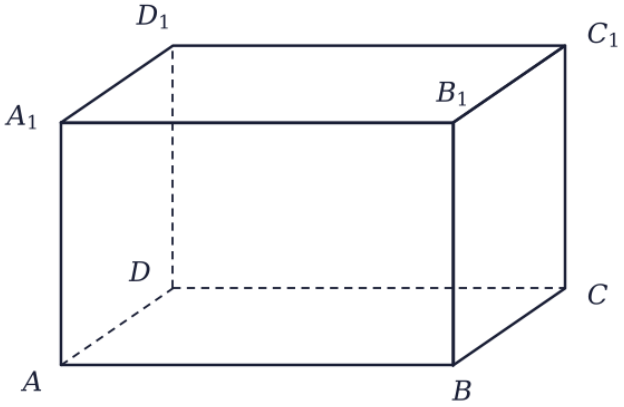
Решение. Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, есть среднее пропорциональное отрезков гипотенузы: $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{4 \cdot 16} = 8$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(-6;\ -6)$ и $\vec{b}\,(6;\ 3)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: -54

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \cdot 6 + (-6) \cdot 3 = -54$.

3 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 4$, $BC = 12$, $AA_1 = 3$. Найдите длину диагонали AC_1.



Ответ: 13

Решение. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений: $AC_1 = \sqrt{4^2 + 12^2 + 3^2} = \sqrt{169} = 13$.

4 В среднем из 500 фонариков, поступивших в продажу, 4 неисправны. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля прибор исправен.

Ответ: 0,992

Решение. $P = \dfrac{500 - 4}{500} = 0{,}992$.

5 Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 30% этих стёкол, вторая — 70%. Первая фабрика выпускает 1% бракованных стёкол, а вторая — 3%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ: 0,024

Решение. По формуле полной вероятности: $P = 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}7 \cdot 0{,}03 = 0{,}024$.

6 Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-4} = 27$.

Ответ: 1

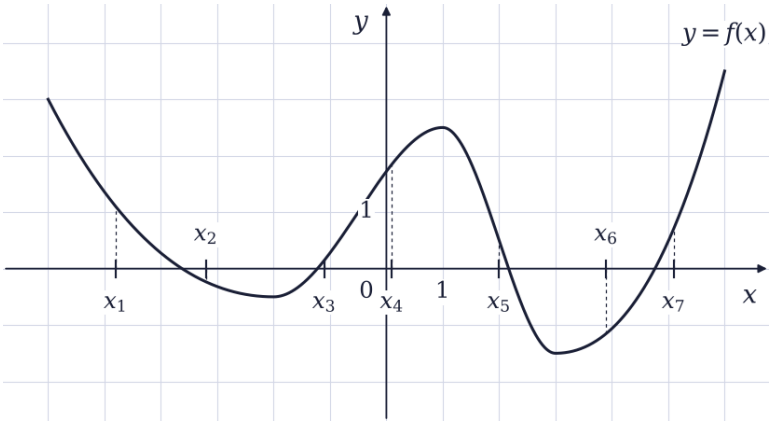
Решение. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-4} = 3^{4-x}$, $27 = 3^3$. Тогда $4 - x = 3$, $x = 1$.

7 Найдите значение выражения $\dfrac{4\sin 86^\circ}{\sin 43^\circ \cdot \sin 47^\circ}$.

Ответ: 8

Решение. $\sin 47^\circ = \cos 43^\circ$, а $\sin 86^\circ = 2\sin 43^\circ \cos 43^\circ$, поэтому выражение равно $4 \cdot 2 = 8$.

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечено 7 точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



Ответ: 4

Решение. Производная положительна в тех точках, где функция возрастает. По графику таких точек 4.

9 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 32$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}9$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 27 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: 4

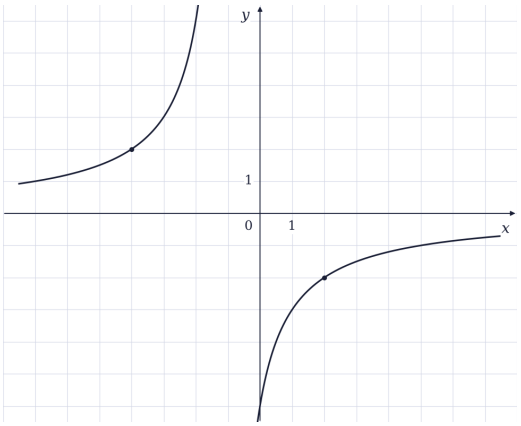
Решение. $RC = 5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 10$. $27 = 0{,}9 \cdot 10 \cdot \log_2 \dfrac{32}{U}$, откуда $\log_2 \dfrac{32}{U} = 3$, $U = \dfrac{32}{8} = 4$.

10 Катер прошёл 36 км против течения реки и 35 км по течению, затратив на весь путь 4 часа. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 18

Решение. $\dfrac{36}{v-2} + \dfrac{35}{v+2} = 4$. Домножив на $(v-2)(v+2)$, получим квадратное уравнение, положительный корень которого больше 2: $v = 18$.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{k}{x+a}$. Найдите значение $f(-17)$.



Ответ: 0,375

Решение. По точкам $(-4;\ 2)$ и $(2;\ -2)$: $k=2\cdot(-4+a)=(-2)\cdot(2+a)$, откуда $a=1$, $k=-6$. $f(-17)=\dfrac{-6}{-16}=0{,}375$.

12 Найдите точку максимума функции $y = (x - 8)^3 - 243(x - 8) + 136$.

Ответ: -1

Решение. Производная $y' = 3((x - 8)^2 - 81)$. Она равна нулю при $x = -1$ и $x = 17$. Знаки производной на трёх промежутках: +, −, +. Поэтому точка максимума $x = -1$, точка минимума $x = 17$. Ответ: -1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos^2 x-\sin(\pi+x)=1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\dfrac{5\pi}{2}$; 3π; 4π

Решение. а) По формуле приведения $\sin(\pi+x)=-\sin x$, а $\cos^2 x=1-\sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$\left(1-\sin^2 x\right)+\sin x=1 \iff \sin^2 x-\sin x=0.$$

Отсюда $\sin x=1$ или $\sin x=0$.

Если $\sin x=1$, то $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$\dfrac{5\pi}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant 4\pi \iff 1 \leqslant k \leqslant \dfrac{7}{4}, k \in \{1\}: x = \dfrac{5\pi}{2}.$

$\dfrac{5\pi}{2} \leqslant \pi n \leqslant 4\pi \iff \dfrac{5}{2} \leqslant n \leqslant 4, n \in \{3, 4\}: x = 3\pi, x = 4\pi.$

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{5\pi}{2}$; 3π; 4π.

14

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 6 точки O и O_1 — центры нижней и верхней граней.

а) Докажите, что OO_1 — общий перпендикуляр прямых AC и B_1D_1.

б) Найдите расстояние между этими прямыми.

Ответ: б) 6

Решение. Прямые AC и B_1D_1 лежат в параллельных плоскостях оснований. O принадлежит AC, O_1 принадлежит B_1D_1, а OO_1 параллельна боковому ребру куба и перпендикулярна обеим плоскостям. Значит, OO_1 перпендикулярна обеим прямым и служит общим перпендикуляром. Её длина равна ребру куба 6.

15

Решите неравенство

$$\log_2^2 x - 2\log_2 x \geqslant 0.$$

Ответ: $(0;\ 1] \cup [4;\ +\infty)$

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Сделаем замену $t = \log_2 x$: $t^2 - 2t \geqslant 0 \iff t(t-2) \geqslant 0 \iff t \leqslant 0$ или $t \geqslant 2$.

Функция $y = \log_2 x$ возрастает, поэтому $\log_2 x \leqslant 0 \iff 0 < x \leqslant 1$, $\log_2 x \geqslant 2 \iff x \geqslant 4$.

Ответ: $(0;\ 1] \cup [4;\ +\infty)$.

16

Кредит 6,3 млн руб. на 2 года под 10 % (стандартная схема), два равных платежа. Найдите переплату по кредиту (сумма выплат минус кредит).

Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 960 000 руб.

Решение. $X = 6{,}3 \cdot 1{,}21 : 2{,}1 = 3{,}63$; выплаты $7{,}26$ млн; переплата $0{,}96$ млн руб.

17

В треугольнике ABC известны AB=10, AC=15, BC=20. Биссектриса AD пересекает BC в точке D.

а) Докажите, что площади ABD и ACD относятся как 2:3.

б) Найдите AD.

Ответ: б) $3\sqrt{6}$

Решение. По теореме о биссектрисе BD:DC=AB:AC=2:3. Треугольники ABD и ACD имеют общую высоту к BC, поэтому площади относятся как основания, то есть 2:3. Из BD=8, DC=12 и теоремы Стюарта: $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD = BC(AD^2 + BD \cdot DC)$. Получаем $100 \cdot 12 + 225 \cdot 8 = 20(AD^2 + 96)$, откуда $AD^2 = 54$ и $AD = 3\sqrt{6}$.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(x^2 - (a+4)x + 4a) \cdot \ln(x-1) = 0$ имеет ровно два различных корня.

Ответ: $a \in (-\infty; 1] \cup \{2; 4\}$

Решение. Область определения: $x > 1$. Разложим первый множитель: $(x-4)(x-a)$. Из $\ln(x-1)=0$ следует $x=2$. Поэтому $x=2$ и $x=4$ — два постоянных корня. Третий корень $x=a$ добавляется, если $a>1$ и $a \neq 2,4$. При $a \leq 1$ он вне области определения, а при $a=2$ или $a=4$ совпадает с постоянным корнем.

19 Число 2025 представляют в виде суммы нескольких (не менее двух) последовательных натуральных чисел.

а) Можно ли представить его в виде суммы 10 последовательных натуральных чисел?

б) Можно ли представить его в виде суммы 12 последовательных натуральных чисел?

в) Какое наибольшее количество слагаемых может быть в таком представлении?

Ответ: а) да: $198 + 199 + \ldots + 207$; б) нет; в) 54

Решение. Сумма k чисел, начиная с m, равна $\dfrac{k(2m+k-1)}{2}$, то есть $k(2m+k-1) = 4050$. а) $k=10$: $2m+9=405$, $m=198$. б) $k=12$: 4050 не делится на 12. в) $m \geq 1$, поэтому $2m+k-1 > k$ и $k^2 < 4050$, $k \leq 63$. Делители числа $4050 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, не превосходящие 63: наибольший из них 54. При $k=54$: $2m+53=75$, $m=11$, то есть $11 + 12 + \ldots + 64 = 2025$.