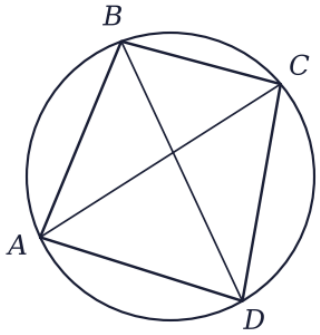
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

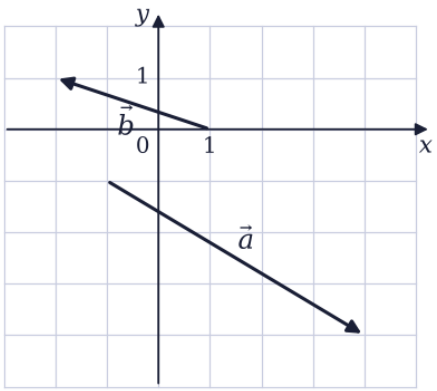
1 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 67°, угол CAD равен 28°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 95

Решение. Вписанные углы CBD и CAD опираются на одну дугу CD, поэтому $\angle CBD = \angle CAD = 28^\circ$. Тогда $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 67^\circ + 28^\circ = 95^\circ$.

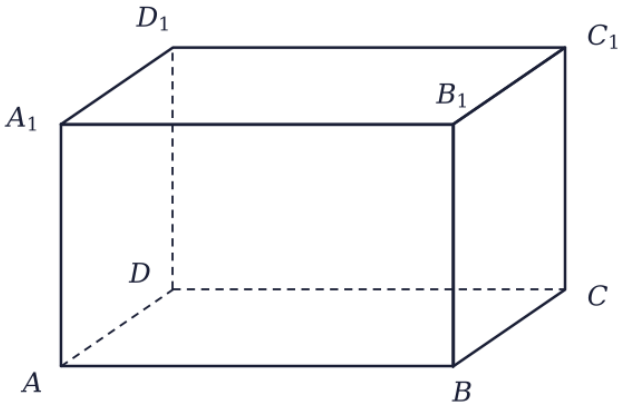
2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Ответ: -18

Решение. По рисунку $\vec{a}\,(5;\ -3)$, $\vec{b}\,(-3;\ 1)$. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot (-3) + (-3) \cdot 1 = -18$.

3 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 4$, $BC = 7$, $AA_1 = 4$. Найдите длину диагонали AC_1.



Ответ: 9

Решение. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений: $AC_1 = \sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9$.

4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют 10 спортсменов из Финляндии, 11 спортсменов из Дании и 3 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Ответ: 0,125

Решение. Всего спортсменов $10 + 11 + 3 = 24$, $P = \dfrac{3}{24} = 0{,}125$.

5 Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 70% этих стёкол, вторая — 30%. Первая фабрика выпускает 5% бракованных стёкол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ: 0,038

Решение. По формуле полной вероятности: $P = 0{,}7 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}01 = 0{,}038$.

6 Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2} = 9$.

Ответ: 0

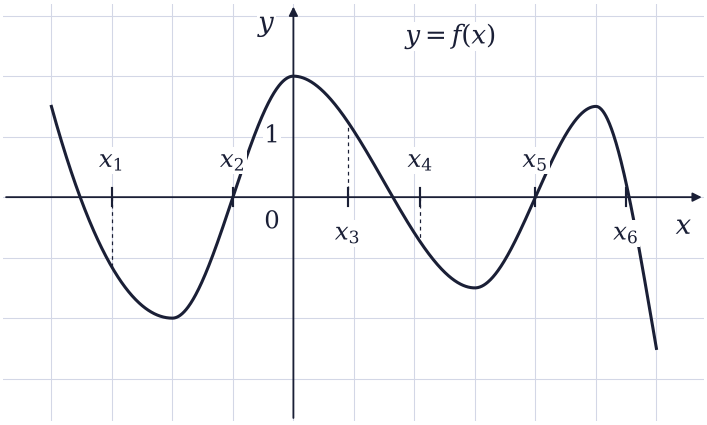
Решение. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2} = 3^{2-x}$, $9 = 3^2$. Тогда $2 - x = 2$, $x = 0$.

7 Найдите значение выражения $(\sqrt{72} - \sqrt{98})(\sqrt{72} + \sqrt{98})$.

Ответ: -26

Решение. По формуле разности квадратов: $(\sqrt{72})^2-(\sqrt{98})^2=72-98=-26$.

8 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечено 6 точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



Ответ: 2

Решение. Производная положительна в тех точках, где функция возрастает. По графику таких точек 2.

9 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t)=21t-5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 18 метров?

Ответ: 1,8

Решение. $h(t)\geqslant 18 \iff 5t^2-21t+18\leqslant 0 \iff 1{,}2\leqslant t\leqslant 3$. Мяч находится не ниже 18 м в течение $3-1{,}2=1{,}8$ с.

10 Два велосипедиста одновременно отправились в 80-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 8 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 5 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 8

Решение. Пусть v — скорость второго. $\dfrac{80}{v}-\dfrac{80}{v+8}=5 \iff 5v^2+40v-640=0$, положительный корень $v=8$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(16)$.



Ответ: -4

Решение. График проходит через точку $(9;\ -3)$: $-3 = k\sqrt{9}$, $k = -1$. $f(16) = -1 \cdot \sqrt{16} = -4$.

12 Найдите точку минимума функции $y = (x - 8)^3 - 243(x - 8) + 133$.

Ответ: 17

Решение. Производная $y' = 3((x - 8)^2 - 81)$. Она равна нулю при x = -1 и x = 17. Знаки производной на трёх промежутках: +, −, +. Поэтому точка максимума x = -1, точка минимума x = 17. Ответ: 17.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $2\cos 2x + 8\cos(\pi - x) = -5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; **б)** $-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos(\pi - x) = -\cos x$, а $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Уравнение принимает вид

$$2\left(2\cos^2 x - 1\right) - 8\cos x = -5 \iff 4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0.$$

Отсюда $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = 1{,}5$. Уравнение $\cos x = 1{,}5$ корней не имеет, так как $|1{,}5| > 1$. Если $\cos x = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$-\pi \leqslant \dfrac{\pi}{3}+2\pi k \leqslant \dfrac{\pi}{2} \iff -\dfrac{2}{3} \leqslant k \leqslant \dfrac{1}{12}, k \in \{0\}: x=\dfrac{\pi}{3}.$
$-\pi \leqslant -\dfrac{\pi}{3}+2\pi n \leqslant \dfrac{\pi}{2} \iff -\dfrac{1}{3} \leqslant n \leqslant \dfrac{5}{12}, n \in \{0\}: x=-\dfrac{\pi}{3}.$
Ответ: а) $\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}; -\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 16 на ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 1 : 3$.
а) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости ACC_1.
б) Найдите угол между плоскостью BDM и плоскостью $ABCD$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Решение. а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD \perp AC$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1 \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, значит, $BD \perp (ACC_1)$. Плоскость BDM проходит через прямую BD, перпендикулярную плоскости ACC_1, поэтому плоскости BDM и ACC_1 перпендикулярны.
б) Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Прямая OM лежит в плоскости ACC_1, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$; кроме того, $OC \perp BD$. Значит, $\angle MOC$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями BDM и $ABCD$. $OC = \dfrac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$, $CM = 4$, $\operatorname{tg}\angle MOC = \dfrac{CM}{OC} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.
Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

15 Решите неравенство

$$\frac{9^x - 10\cdot 3^x + 9}{\log_3(x+4)} \leqslant 0.$$

Ответ: $(-4;\ -3) \cup [0;\ 2]$

Решение. Область допустимых значений: $x+4>0$ и $\log_3(x+4) \neq 0$, то есть $x > -4$, $x \neq -3$.
Числитель раскладывается на множители: $9^x - 10\cdot 3^x + 9 = (3^x-1)(3^x-9)$.
Функции $y=3^t$ и $y=\log_3 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак 3^x-1 совпадает со знаком x, знак 3^x-9 — со знаком $x-2$, знак $\log_3(x+4) = \log_3(x+4) - \log_3 1$ — со знаком $x+3$.
Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{x(x-2)}{x+3} \leqslant 0, \quad x > -4.$$

Метод интервалов: на $(-4;\ -3)$ дробь отрицательна; на $(-3;\ 0)$ дробь положительна; на $(0;\ 2)$ дробь отрицательна; на $(2;\ +\infty)$ дробь положительна; в точках $x=0, x=2$ числитель равен

нулю.
Ответ: $(-4;\ -3)\cup[0;\ 2]$.

16 Кредит 2,2 млн руб. погашен двумя равными платежами по 1 440 000 руб. (стандартная схема, ставка r %). Найдите r.
Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 20 %

Решение. $2{,}2q^2 = 1{,}44(q+1) \Rightarrow 55q^2 - 36q - 36 = 0$, $D = 9216 = 96^2$, $q = \dfrac{132}{110} = 1{,}2$, $r = 20$.

17 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD.
а) Докажите, что $AB = 2AD$.
б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AD = 5$, $AK = 8$.

Ответ: б) 48

Решение. а) Прямые AB и CD параллельны, поэтому $\angle AKD = \angle KAB$ как накрест лежащие углы. AK — биссектриса, поэтому $\angle KAB = \angle KAD$. Значит, $\angle AKD = \angle KAD$, и треугольник ADK равнобедренный: $DK = AD$. Аналогично треугольник BCK равнобедренный: $CK = BC = AD$. Тогда $AB = CD = DK + KC = 2AD$.
б) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к стороне AB, равна 180°, поэтому $\angle KAB + \angle KBA = 90^\circ$ и $\angle AKB = 90^\circ$. Треугольник ABK и параллелограмм имеют общее основание AB и одинаковую высоту (расстояние между прямыми AB и CD), поэтому $S_{ABCD} = 2S_{ABK} = AK \cdot BK$. По пункту а) $AB = 2AD = 10$. Из прямоугольного треугольника ABK: $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$. $S_{ABCD} = 8 \cdot 6 = 48$.
Ответ: б) 48.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2x - a^2 + 2a = 0$ имеет ровно один корень на отрезке [0; 3].

Ответ: a ∈ [−1; 0) ∪ {1} ∪ (2; 3]

Решение. Разложим: (x−a)(x+a−2)=0. Кандидаты x=a и x=2−a. Первый лежит в [0; 3] при a∈[0; 3], второй — при a∈[−1; 2]. Ровно один из них лежит в отрезке при a∈[−1;0)∪(2;3]. Если оба лежат в отрезке, они совпадают только при a=1. Включаем a=1.

19 Произведение цифр натурального числа равно 360.

а) Может ли это число быть трёхзначным?

б) Может ли сумма цифр этого числа равняться 16?

в) Найдите наименьшее такое число, делящееся на 4.

Ответ: а) да, например 589; б) нет; в) 2656

Решение. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. а) $5 \cdot 8 \cdot 9 = 360$. б) Цифра 5 встречается ровно один раз, остальные цифры, отличные от единицы, дают произведение $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Замена $6 \to 2, 3$, $8 \to 2, 2, 2$, $9 \to 3, 3$ уменьшает сумму цифр, замена $4 \to 2, 2$ её не меняет, поэтому сумма таких цифр не меньше $2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 12$, а сумма всех цифр не меньше $5 + 12 = 17$. в) Трёхзначные числа с произведением цифр 360 составлены из цифр $5, 8, 9$, ни одно из них не делится на 4. Четырёхзначные: цифры 5 и три цифры с произведением 72. Начинаться с 1 может только число из цифр $1, 5, 8, 9$; чётная цифра в нём одна, и окончания 18, 58, 98 на 4 не делятся. Первая цифра 2: наборы $\{2, 4, 5, 9\}$ (окончания 54, 94 на 4 не делятся) и $\{2, 5, 6, 6\}$; из него на 4 делится только 2656 (56 делится на 4).