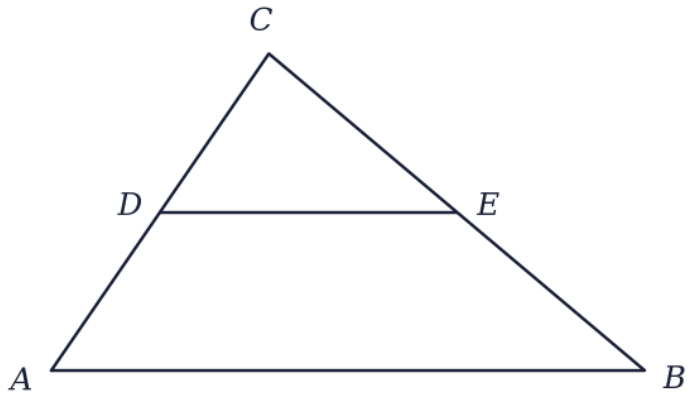
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 Площадь треугольника ABC равна 96, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь треугольника CDE.



Ответ: 24

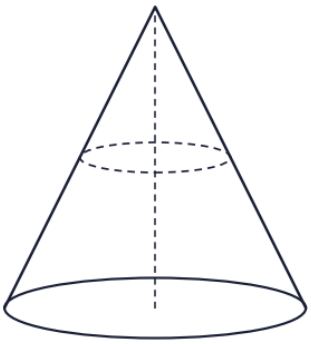
Решение. Треугольник CDE подобен треугольнику CAB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, поэтому его площадь в 4 раза меньше: $\frac{96}{4} = 24$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(1;\ -3)$ и $\vec{b}\,(-5;\ -3)$. Найдите длину вектора $3\vec{a} - \vec{b}$.

Ответ: 10

Решение. $3\vec{a} - \vec{b} = (8;\ -6)$, $|3\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{64 + 36} = 10$.

3 Объём конуса равен 200. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.



Ответ: 25

Решение. Меньший конус подобен исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$, объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия: $V' = \frac{200}{8} = 25$.

4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют 3 спортсмена из Финляндии, 4 спортсмена из Дании и 3 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Ответ: 0,3

Решение. Всего спортсменов $3 + 4 + 3 = 10$, $P = \frac{3}{10} = 0{,}3$.

5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первые две мишени и не попадёт в две последние.

Ответ: 0,0256

Решение. Выстрелы независимы: $P = 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}0256$.

6 Найдите корень уравнения $\log_5(157 - x) = 3$.

Ответ: 32

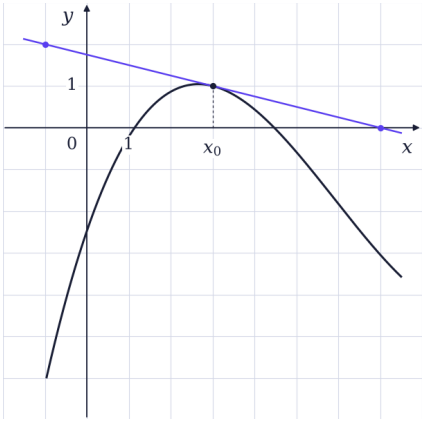
Решение. По определению логарифма $157 - x = 5^3 = 125$, откуда $x = 32$. Аргумент логарифма положителен.

7 Найдите значение выражения $36^{\log_6 3}$.

Ответ: 9

Решение. $36^{\log_6 3} = \left(6^{\log_6 3}\right)^2 = 3^2 = 9.$

8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: -0,25

Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Касательная проходит через точки $(-1;\ 2)$ и $(7;\ 0)$: $k = \dfrac{0-2}{7-(-1)} = -0{,}25.$

9 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 6 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 8$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}5$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 45 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: 4

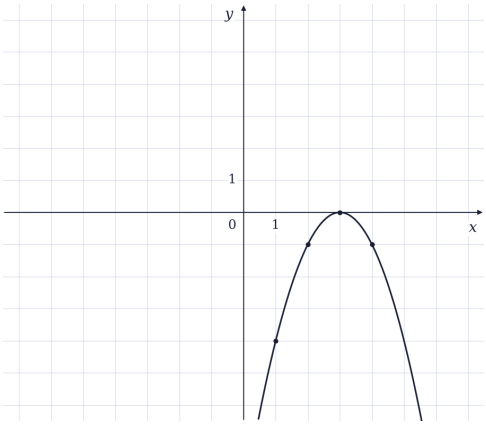
Решение. $RC = 6 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 30.$ $45 = 1{,}5 \cdot 30 \cdot \log_2 \dfrac{8}{U}$, откуда $\log_2 \dfrac{8}{U} = 1, U = \dfrac{8}{2} = 4.$

10 Катер прошёл 24 км против течения реки и 60 км по течению, затратив на весь путь 3 часа. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 27

Решение. $\dfrac{24}{v-3}+\dfrac{60}{v+3}=3$. Домножив на $(v-3)(v+3)$, получим квадратное уравнение, положительный корень которого больше 3: $v=27$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x)=ax^2+bx+c$. Найдите значение $f(-9)$.



Ответ: -144

Решение. Вершина параболы — точка $(3;\,0)$, поэтому $f(x)=a(x-3)^2+0$. По точке $(4;\,-1)$: $a=-1$. $f(-9)=-1\cdot(-9-3)^2+0=-144$.

12 Найдите наибольшее значение функции y = (x − 7)^3 − 192(x − 7) + 130 на отрезке [-9; 15].

Ответ: 1154

Решение. Производная y′ = 3((x − 7)^2 − 64); критические точки x = -1, x = 15. На концах отрезка y(-9) = -894, y(15) = -894. Во внутренней критической точке y(-1) = 1154. Наибольшее значение: 1154.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $4\cos^2 x-8\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=7$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\,0\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; **б)** $-\dfrac{5\pi}{6}$; $-\dfrac{\pi}{6}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$, а $\cos^2 x=1-\sin^2 x$.

Уравнение принимает вид

$$4\left(1-\sin^2 x\right)-8\sin x=7 \iff 4\sin^2 x+8\sin x+3=0.$$

Отсюда $\sin x=-\frac{1}{2}$ или $\sin x=-1{,}5$. Уравнение $\sin x=-1{,}5$ корней не имеет, так как $|-1{,}5|>1$.

Если $\sin x=-\frac{1}{2}$, то $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\,0\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$-\frac{3\pi}{2}\leqslant -\frac{\pi}{6}+2\pi k\leqslant 0 \iff -\frac{2}{3}\leqslant k\leqslant \frac{1}{12}$, $k\in\{0\}$: $x=-\frac{\pi}{6}$.

$-\frac{3\pi}{2}\leqslant -\frac{5\pi}{6}+2\pi n\leqslant 0 \iff -\frac{1}{3}\leqslant n\leqslant \frac{5}{12}$, $n\in\{0\}$: $x=-\frac{5\pi}{6}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 6 точка P — середина AB_1, а точка Q лежит на BD_1, причём $BQ:QD_1=1:2$.

а) Докажите, что PQ перпендикулярна прямым AB_1 и BD_1.

б) Найдите расстояние между этими прямыми.

Ответ: б) √6

Решение. Введём A=(0,0,0), B=(6,0,0), D=(0,6,0), A_1=(0,0,6). Тогда P=(3,0,3), Q=(4,2,2), PQ=(1,2,−1). Направляющие векторы AB_1=(6,0,6), BD_1=(−6,6,6). Скалярные произведения с PQ равны соответственно 6−6=0 и −6+12−6=0. Это доказывает а). Точки P и Q лежат на данных прямых, следовательно, PQ — общий перпендикуляр и расстояние равно |PQ|=√(1+4+1)=√6.

15 Решите неравенство

$$\log_3^2 x-2\log_3 x-8\geqslant 0.$$

Ответ: $\left(0;\,\frac{1}{9}\right]\cup[81;\,+\infty)$

Решение. ОДЗ: $x>0$. Сделаем замену $t=\log_3 x$: $t^2-2t-8\geqslant 0 \iff (t+2)(t-4)\geqslant 0 \iff t\leqslant -2$ или $t\geqslant 4$.

Функция $y=\log_3 x$ возрастает, поэтому $\log_3 x\leqslant -2 \iff 0<x\leqslant\frac{1}{9}$, $\log_3 x\geqslant 4 \iff x\geqslant 81$.

Ответ: $\left(0;\,\frac{1}{9}\right]\cup[81;\,+\infty)$.

16 Кредит 4,641 млн руб. на 4 года под 10 % (стандартная схема) погашается четырьмя равными платежами. Найдите платёж.

Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 1 464 100 руб.

Решение. $4{,}641 \cdot 1{,}4641 = X(1{,}331 + 1{,}21 + 1{,}1 + 1) = 4{,}641X \Rightarrow X = 1{,}4641$ млн руб.

17 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD.

а) Докажите, что $AB = 2AD$.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AK = 12$, $BK = 16$.

Ответ: б) 192

Решение. а) Прямые AB и CD параллельны, поэтому $\angle AKD = \angle KAB$ как накрест лежащие углы. AK — биссектриса, поэтому $\angle KAB = \angle KAD$. Значит, $\angle AKD = \angle KAD$, и треугольник ADK равнобедренный: $DK = AD$. Аналогично треугольник BCK равнобедренный: $CK = BC = AD$. Тогда $AB = CD = DK + KC = 2AD$.

б) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к стороне AB, равна 180°, поэтому $\angle KAB + \angle KBA = 90^\circ$ и $\angle AKB = 90^\circ$. Треугольник ABK и параллелограмм имеют общее основание AB и одинаковую высоту (расстояние между прямыми AB и CD), поэтому $S_{ABCD} = 2S_{ABK} = AK \cdot BK$. $S_{ABCD} = 12 \cdot 16 = 192$.

Ответ: б) 192.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4^x - 2(a+1)\cdot 2^x + 4a = 0$ имеет ровно один корень на отрезке [0; 2].

Ответ: a ∈ (−∞; 1/2) ∪ {1} ∪ (2; +∞)

Решение. Положим $t = 2^x$. На отрезке $x \in [0; 2]$ имеем $t \in [1; 4]$. Уравнение принимает вид $(t-2)(t-2a)=0$. Корень $t=2$ принадлежит отрезку всегда. Второй корень не добавляет нового решения тогда и только тогда, когда $2a<1$, $2a>4$ либо $2a=2$. Отсюда $a<1/2$, $a>2$ либо $a=1$.

19 Двузначное натуральное число делят на сумму его цифр.

а) Может ли частное равняться 7?

б) Может ли частное равняться 11?

в) Найдите наименьшее возможное значение частного.

Ответ: а) да, например $21:3=7$; б) нет; в) $\frac{19}{10}$

Решение. б) Если $n=11S$, то $n-S=10S$ делится на 9 (число и сумма цифр дают одинаковые остатки), значит, S делится на 9: $S=9$ ($n=99$, но сумма цифр 18) или $S=18$ ($n=198$ — не двузначное). в) $\frac{10a+b}{a+b}=1+\frac{9a}{a+b}\geq 1+\frac{9a}{a+9}\geq 1+\frac{9}{10}$, так как $\frac{a}{a+9}$ растёт с ростом $a\geq 1$. Равенство при $n=19$.