Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 Сумма двух углов параллелограмма $ABCD$ равна 142°. Найдите больший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 109

Решение.

Соседние углы параллелограмма в сумме дают 180°, поэтому 142° — сумма двух противоположных углов. Они равны: каждый равен 71°. Соседний с ними угол равен $180^\circ - 71^\circ = 109^\circ$.

Ответ: 109.

2 Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны 4 и 7, угол между ними равен 120°. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

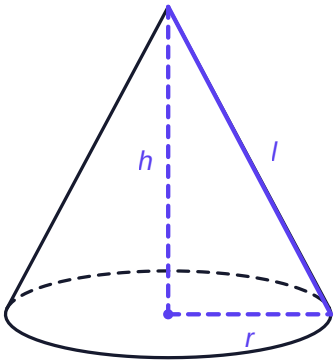
Ответ: -14

Решение.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 7 \cdot \cos 120^\circ = 28 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -14.$$

Ответ: -14.

3 Радиус основания конуса равен 6, образующая равна 10. Найдите объём конуса, делённый на π.



Ответ: 96

Решение.

$h=\sqrt{10^2-6^2}=8.$

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot 36\cdot 8=96\pi.$$

Ответ: 96.

4 В соревнованиях по прыжкам в воду участвуют 4 спортсмена из Бельгии, 7 спортсменов из Италии и 9 спортсменов из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Италии.

Ответ: 0,35

Решение.

Всего спортсменов $4+7+9=20$. На последнем месте с равными шансами окажется любой из них:

$$P=\frac{7}{20}=0{,}35.$$

Ответ: 0,35.

5 В компьютерной игре из каждого сундука с вероятностью 0,2 выпадает редкий предмет, сундуки независимы. Игрок открывает сундуки по одному до первого редкого предмета. Найдите вероятность того, что редкий предмет выпадет именно из третьего сундука.

Ответ: 0,128

Решение.

Нужна последовательность «обычный, обычный, редкий». Обычный предмет выпадает с вероятностью $1-0{,}2=0{,}8$:

$$P = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}128.$$

Ответ: 0,128.

6 Найдите корень уравнения $\sqrt{3x+31} = 8$.

Ответ: 11

Решение.

Возводим в квадрат: $3x + 31 = 64$, $3x = 33$, $x = 11$.

Проверка: $\sqrt{33+31} = \sqrt{64} = 8$.

Ответ: 11.

7 Найдите значение выражения $\log_2 \sqrt[5]{8}$.

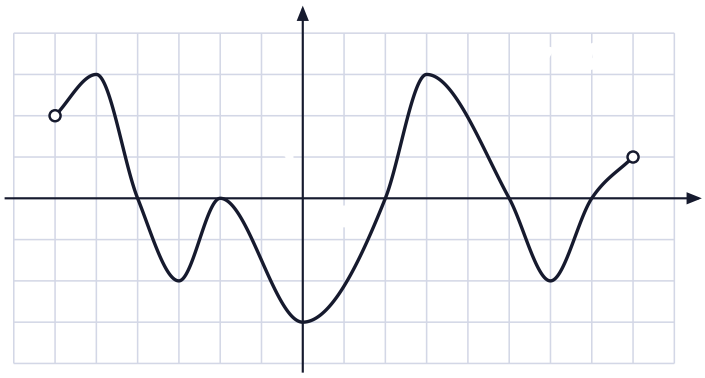
Ответ: 0,6

Решение.

$\sqrt[5]{8} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{3}{5}}$, поэтому $\log_2 \sqrt[5]{8} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$.

Ответ: 0,6.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6;\ 8)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 4

Решение.

Нули производной: -4, -2, 2, 5, 7. В точке -2 производная знак сохраняет (слева и справа $f'(x) < 0$), это не экстремум. В остальных четырёх точках знак меняется.

Ответ: 4.

9 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 120 - 8p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 400 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Ответ: 10

Решение.

$p(120 - 8p) \geq 400 \iff 8p^2 - 120p + 400 \leq 0 \iff p^2 - 15p + 50 \leq 0.$

Корни $p = 5$ и $p = 10$, неравенство выполняется при $5 \leq p \leq 10$. Наибольшая цена 10 тыс. руб.

Ответ: 10.

10 Из пункта A круговой трассы выехал велосипедист. Через 20 минут следом за ним отправился мотоциклист. Через 10 минут после отправления мотоциклист догнал велосипедиста в первый раз, а ещё через 45 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 27 км. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 54

Решение.

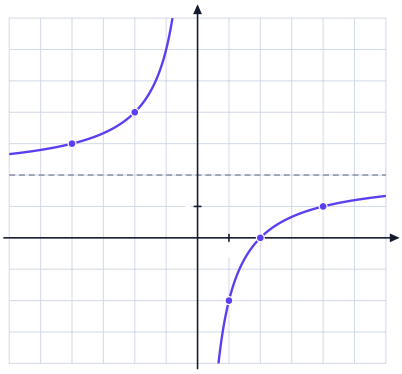
Пусть v и w км/ч — скорости велосипедиста и мотоциклиста. К первой встрече велосипедист ехал $\frac{1}{2}$ ч, мотоциклист $\frac{1}{6}$ ч, пути равны:

$$\frac{v}{2} = \frac{w}{6}, \quad w = 3v.$$

Между встречами прошло $0{,}75$ ч, и мотоциклист проехал на целый круг больше: $(w - v) \cdot 0{,}75 = 27$, $2v \cdot 0{,}75 = 27$, $v = 18$. Тогда $w = 3 \cdot 18 = 54$.

Ответ: 54.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = \dfrac{k}{x} + a$. Найдите $f(40)$.



Ответ: 1,9

Решение.

Горизонтальная асимптота $y=2$, поэтому $a=2$. Точка $(2;\,0)$: $0=\dfrac{k}{2}+2$, $k=-4$. Проверка по точке $(-2;\,4)$: $\dfrac{-4}{-2}+2=4$.

$f(40)=\dfrac{-4}{40}+2=-0{,}1+2=1{,}9$.

Ответ: $1{,}9$.

12 Найдите абсциссу точки максимума функции f(x)=−x²+8x−9.

Ответ: 4

Решение. Ветви параболы направлены вниз, абсцисса вершины x=−8/(2·(−1))=4.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие промежутку $[0;\pi]$.

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n,\quad n\in\mathbb{Z}$.

б) $\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{6}$.

Решение.

Способ: замена и преобразование аргумента.

1. Тангенс равен 1 при $3x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\pi n$.
2. Отсюда $3x=\frac{\pi}{2}+\pi n$. Делим обе части на 3: $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$. В полученных точках косинус аргумента не равен нулю.
3. Общий ответ: $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n,\quad n\in\mathbb{Z}$.
4. Серия $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$, $n\in\mathbb{Z}$: подходящие значения n: $0;1;2$.
5. После отбора по заданным границам: $\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{6}$.

Типичная ошибка. Сначала запишите серию для аргумента с периодом тангенса π, потом делите на коэффициент при x.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания и боковое ребро равны 6, M — середина AB.

а) Докажите, что $AB\perp(MCC_1)$.

б) Найдите синус угла между плоскостями ABC_1 и ABC.

Ответ: б) 2/√7

Решение. а) CM — высота равностороннего треугольника ABC, поэтому AB⊥CM. Прямая через M, параллельная CC_1, лежит в плоскости MCC_1 и также перпендикулярна AB. Значит, AB⊥(MCC_1).
б) Плоскости пересекаются по AB; угол C_1MC — линейный угол двугранного угла. В прямоугольном MCC_1: MC=3√3, CC_1=6, MC_1=3√7. Поэтому $\sin\angle C_1MC = 6/(3\sqrt{7}) = 2/\sqrt{7}$.

15 Решите неравенство $(4^x - 5\cdot 2^x + 4)\log_2(3-x) \geq 0$.

Ответ: $(-\infty;\,0]\cup\{2\}$

Решение. ОДЗ $x<3$. Знак $(2^x-1)(2^x-4)$ совпадает со знаком $x(x-2)$, знак $\log_2(3-x)$ — со знаком $2-x$. Получаем $-x(x-2)^2\geq 0$: $x\leq 0$ или $x=2$.

16 Кредит 331 000 рублей взят под 10 % годовых и гасится тремя равными ежегодными платежами. Найдите величину платежа и переплату.

Ответ: платёж 133 100 руб.; переплата 68 300 руб.

Решение. $331\,000\cdot 1{,}331 = X(1{,}21+1{,}1+1) = 3{,}31X \Rightarrow X = 133\,100$. Выплаты $3X = 399\,300$, переплата $68\,300$ руб.

17 Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.
а) Докажите, что $\angle AHC = 180^\circ - \angle ABC$.
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AHC, если $AC = 6\sqrt{3}$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

Ответ: б) 6

Решение. а) В четырёхугольнике BA_1HC_1 два прямых угла, поэтому $\angle A_1HC_1 = 180^\circ - \angle B$, а $\angle AHC = \angle A_1HC_1$ как вертикальные. б) $R = \dfrac{AC}{2\sin 120^\circ} = \dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$.

18 Найдите все значения a, при которых уравнение $\log_2 x+\log_2(4-x)=a$ имеет ровно два действительных корня.

Ответ: a∈(−∞;2)

Решение. Область определения $0<x<4$. После объединения логарифмов имеем $x(4-x)=2^a$. Левая часть достигает максимума 4 при x=2 и стремится к нулю на концах. При $0<2^a<4$ (a<2) есть два симметричных корня; при a=2 один, при a>2 нет.

19 Числа от 1 до n требуется разбить на два множества одинаковой мощности и одинаковой суммы.

а) Возможно ли это при n=20?

б) Возможно ли это при n=18?

в) Для скольких натуральных n≤100 такое разбиение возможно?

Ответ: а) да; б) нет; в) 25

Решение. Одинаковая мощность требует n=2m. Общая сумма равна m(2m+1); для двух равных сумм она должна быть чётной, то есть m чётно. При m=2k попарно объединим числа i и 2m+1−i (m пар одинаковой суммы) и отдадим по k пар каждой части. В частях по 2k чисел и равная сумма. Следовательно, возможно ровно при n, кратных 4. До 100 таких чисел 25: n=20 подходит, n=18 не подходит.