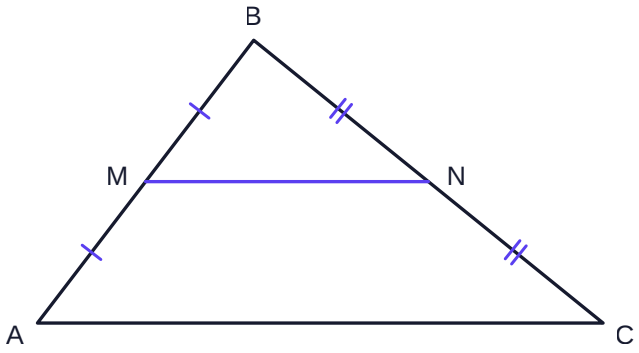
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В треугольнике ABC отрезок MN — средняя линия, параллельная стороне AC. Площадь треугольника BMN равна 11. Найдите площадь треугольника ABC.



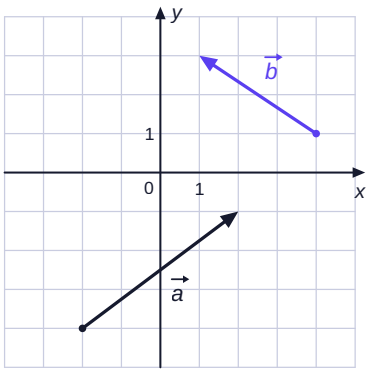
Ответ: 44

Решение.

Средняя линия вдвое короче стороны AC, поэтому треугольник BMN подобен треугольнику BAC с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Площади относятся как $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, значит, $S_{ABC} = 4 \cdot 11 = 44$.

Ответ: 44.

2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Ответ: -6

Решение.

По рисунку $\vec{a} = (2 - (-2);\ -1 - (-4)) = (4;\ 3)$, $\vec{b} = (1 - 4;\ 3 - 1) = (-3;\ 2)$. Тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = -12 + 6 = -6$.

Ответ: -6.

3 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 27 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 3 раза больше диаметра первого? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 3

Решение.

Объём сохраняется: $\pi r^2 \cdot 27 = \pi (3r)^2 \cdot h$, откуда $h = \dfrac{27}{9} = 3$ см.

Ответ: 3.

4 16 спортсменов случайным образом делят на 4 команды по 4 человека. Найдите вероятность того, что Иван и Пётр окажутся в одной команде.

Ответ: 0,2

Решение.

Иван занял одно место. Для Петра осталось 15 мест, из них 3 — в команде Ивана:

$$P = \frac{3}{15} = 0{,}2.$$

Ответ: 0,2.

5 Баскетболист бросает мяч в кольцо до первого попадания. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,6, броски независимы. Найдите вероятность того, что баскетболисту понадобится ровно три броска.

Ответ: 0,096

Решение.

Нужна последовательность «мимо, мимо, попал»:

$$P = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}096.$$

Ответ: 0,096.

6 Найдите корень уравнения $\dfrac{x-6}{x+4} = \dfrac{x-6}{2x-1}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ: 6

Решение.

ОДЗ: $x \neq -4, x \neq 0{,}5$. По свойству пропорции $(x-6)(2x-1)=(x-6)(x+4)$.

Переносим: $(x-6)\big((2x-1)-(x+4)\big)=0$, то есть $(x-6)(x-5)=0$. Корни $x=6$ и $x=5$, оба входят в ОДЗ.

Проверка: при $x=6$ обе дроби равны 0; при $x=5$ обе равны $-\dfrac{1}{9}$.

Больший корень 6.

Ответ: 6.

7 Найдите значение выражения $\log_2 12+\log_2 \dfrac{8}{3}$.

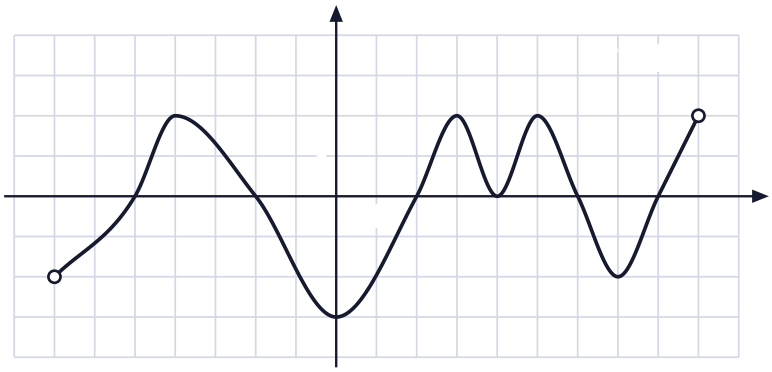
Ответ: 5

Решение.

$$\log_2 12+\log_2 \frac{8}{3}=\log_2\left(12\cdot\frac{8}{3}\right)=\log_2 32=5.$$

Ответ: 5.

8 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7;\,9)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6;\,6]$.



Ответ: 2

Решение.

Нули производной и смена знака:

- $x=-5$: «−» → «+», минимум;
- $x=-2$: «+» → «−», максимум;
- $x=2$: «−» → «+», минимум;
- $x=4$: касание оси, знак сохраняется, экстремума нет;
- $x=6$: «+» → «−», максимум;
- $x=8$: «−» → «+», минимум.

Точки минимума: -5, 2, 8. Отрезку $[-6;\,6]$ принадлежат -5 и 2.

Ответ: 2.

9 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 2 + 13t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 8 метров?

Ответ: 1,4

Решение.

$2 + 13t - 5t^2 \geq 8 \iff 5t^2 - 13t + 6 \leq 0.$

$D = 169 - 120 = 49, t_1 = \dfrac{13 - 7}{10} = 0{,}6, t_2 = \dfrac{13 + 7}{10} = 2.$

Мяч на высоте не менее 8 м при $0{,}6 \leq t \leq 2$, то есть $2 - 0{,}6 = 1{,}4$ с.

Ответ: 1,4.

10 Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 12 км. Скорость первого мотоциклиста на 20 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз?

Ответ: 18

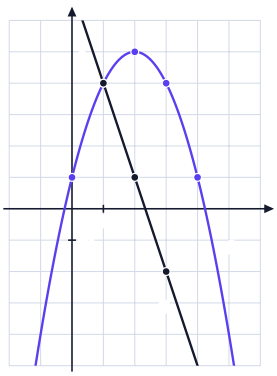
Решение.

По ходу движения между мотоциклистами полкруга: $12 : 2 = 6$ км. Быстрый сокращает это расстояние со скоростью 20 км/ч:

$$t = \frac{6}{20} = 0{,}3 \text{ ч} = 18 \text{ мин.}$$

Ответ: 18.

11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx + d$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



Ответ: -11

Решение.

Вершина параболы $(2;\,5)$, точка $(0;\,1)$: $1 = 4a + 5$, $a = -1$, $f(x) = -(x-2)^2 + 5 = -x^2 + 4x + 1$.

Прямая проходит через $A(1;\,4)$ и $(2;\,1)$: $k = -3$, $g(x) = -3x + 7$.

$-x^2 + 4x + 1 = -3x + 7 \iff x^2 - 7x + 6 = 0$. По теореме Виета $x_A + x_B = 7$, $x_A = 1$, поэтому $x_B = 6$.

Ордината: $g(6) = -18 + 7 = -11$. Проверка: $f(6) = -16 + 5 = -11$.

Ответ: -11.

12 Найдите абсциссу точки максимума функции f(x)=ln x−x/2 при x>0.

Ответ: 2

Решение. f′(x)=1/x−1/2. Производная положительна при 0<x<2 и отрицательна при x>2; максимум при x=2.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\log_2(1+\sin x) + \log_2(1-\sin x) = -1$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие промежутку $[-\pi;\,\pi]$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}$.
б) $-\frac{3\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}$.

Решение.

Способ: логарифмы, степени и корни.

1. ОДЗ: $1+\sin x > 0$ и $1-\sin x > 0$, то есть $-1 < \sin x < 1$.
2. Складываем логарифмы: $\log_2(1-\sin^2 x) = -1$, откуда $1 - \sin^2 x = \frac{1}{2}$.
3. Получаем $\sin^2 x = \frac{1}{2}$. Тогда $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, то есть $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$. Эти две серии записываются одной: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. Все они входят в ОДЗ.
4. Общий ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}$.
5. Серия $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$: подходящие значения n: $-2; -1; 0; 1$.
6. После отбора по заданным границам: $-\frac{3\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}$.

Типичная ошибка. Правило суммы логарифмов применяется только при положительности обоих аргументов.

14 В правильном тетраэдре ABCD с ребром 6 точки M и N — середины AB и CD соответственно.

а) Докажите, что MN перпендикулярна AB и CD.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

Ответ: б) $3\sqrt{2}$

Решение. а) В равносторонних ABC и ABD медианы CM и DM перпендикулярны AB. Значит, $AB\perp(CMD)$, в частности $AB\perp MN$. Аналогично медианы AN и BN перпендикулярны CD, поэтому $CD\perp(ABN)$, в частности $CD\perp MN$.
б) MN — общий перпендикуляр. В равностороннем MCD имеем $CM=DM=3\sqrt{3}$, $CN=3$. Тогда $MN=\sqrt{CM^2-CN^2}=\sqrt{27-9}=3\sqrt{2}$.

15 Решите неравенство $\log_x(6-x)\geq 1$.

Ответ: $(1;\,3]$

Решение. ОДЗ: $0<x<6, x\ /\ 1$. $\log_x(6-x)-\log_x x\geq 0 \iff (x-1)(6-x-x)\geq 0 \iff 1\leq x\leq 3$. Исключаем $x=1$.

16 Кредит 4 млн руб. на 5 лет под 20 % (стандартная схема). Первые 3 года долг каждый июль уменьшается на 10 % от суммы кредита, а за последние 2 года — равномерно до нуля. Найдите общую сумму выплат.

Ответ: 7 000 000 руб.

Решение. Долги под проценты: S; $0{,}9S$; $0{,}8S$; $0{,}7S$; $0{,}35S$ (сумма $3{,}75S$). $\Sigma = 4(1+0{,}2\cdot 3{,}75)=7$ млн руб.

17 Из точки M к окружности проведены касательная MA (A — точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках B и C, причём B лежит между M и C.
а) Докажите, что треугольники MAB и MCA подобны.
б) Найдите BC, если $MA=12$, $MB=8$.

Ответ: б) 10

Решение. а) $\angle MAB=\angle MCA$ (угол между касательной и хордой равен вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу), угол M общий. б) Из подобия $MA^2=MB\cdot MC$, $MC=\dfrac{144}{8}=18$, $BC=18-8=10$.

18 Найдите все значения a, при которых уравнение $|x^2-a|=1$ имеет ровно четыре различных действительных корня.

Ответ: a∈(1;+∞)

Решение. Уравнение равносильно $x^2=a+1$ или $x^2=a-1$. Чтобы каждое из двух разных равенств дало по два корня, нужны $a+1>0$ и $a-1>0$, то есть $a>1$. При $a=1$ второе равенство даёт один корень $x=0$, всего три; при меньших a четырёх нет.

19 Три различных натуральных числа образуют арифметическую прогрессию и имеют сумму 30.

а) Может ли наименьшее равняться 4?

б) Может ли наименьшее равняться 9?

в) Найдите наибольшее возможное произведение этих чисел.

Ответ: а) да; б) да; в) 990

Решение. Средний член равен 10, остальные $10-d$ и $10+d$, где d — целое от 1 до 9. При наименьшем 4 имеем $d=6$ и набор 4,10,16; при наименьшем 9 имеем $d=1$ и набор 9,10,11 — оба возможны. Произведение равно $10(100-d^2)$, наибольшее при $d=1$ и равно 990.