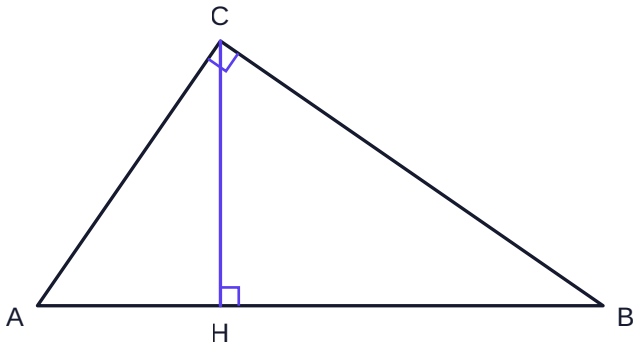
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 15$, $BC = 20$, CH — высота. Найдите CH.



Ответ: 12

Решение.

$AB = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$. Из равенства площадей $CH = \dfrac{AC \cdot BC}{AB} = \dfrac{15 \cdot 20}{25} = 12$.

Ответ: 12.

2 Даны векторы $\vec{a}(4;\ -3)$ и $\vec{b}(-2;\ 5)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

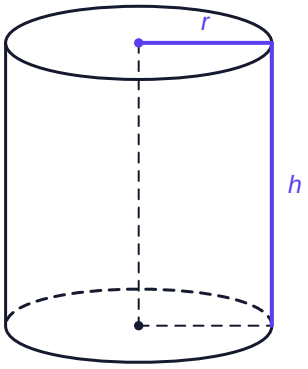
Ответ: -23

Решение.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot (-2) + (-3) \cdot 5 = -8 - 15 = -23$.

Ответ: -23.

3 Радиус основания цилиндра равен 4, высота равна 5. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, делённую на π.



Ответ: 72

Решение.

$$S_{\text{полн}} = 2\pi \cdot 4 \cdot 5 + 2\pi \cdot 4^2 = 40\pi + 32\pi = 72\pi.$$

Делим на π: 72.

Ответ: 72.

4 В группе 20 туристов. С помощью жребия они выбирают пять человек, которые должны идти в село за продуктами. Турист Сергей хотел бы сходить в магазин, но он подчиняется жребию. Найдите вероятность того, что Сергей пойдёт в магазин.

Ответ: 0,25

Решение.

Из 20 туристов выбирают 5, поэтому

$$P = \frac{5}{20} = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

5 В аудитории два проектора. Вероятность того, что к концу семестра первый проектор потребует ремонта, равна 0,2. Для второго проектора эта вероятность тоже равна 0,2. Вероятность того, что ремонта потребуют оба проектора, равна 0,08. Найдите вероятность того, что к концу семестра оба проектора будут исправны.

Ответ: 0,68

Решение.

Пусть A и B — «ремонт нужен первому» и «ремонт нужен второму». Хотя бы одному нужен ремонт:

$$P(A \cup B) = 0{,}2 + 0{,}2 - 0{,}08 = 0{,}32.$$

Оба исправны — противоположное событие: $1 - 0{,}32 = 0{,}68$.

Ответ: 0,68.

6 Найдите корень уравнения $\dfrac{4}{x-3} = \dfrac{6}{x+2}$.

Ответ: 13

Решение.

ОДЗ: $x \neq 3$, ~~$x \neq -2$~~. По свойству пропорции $4(x+2) = 6(x-3)$, $4x + 8 = 6x - 18$, $2x = 26$, $x = 13$.

Проверка: $\dfrac{4}{10} = 0{,}4$ и $\dfrac{6}{15} = 0{,}4$.

Ответ: 13.

7 У канала Миши 500 подписчиков. Каждый месяц число подписчиков удваивается. Через сколько месяцев у канала станет 16 000 подписчиков?

Ответ: 5

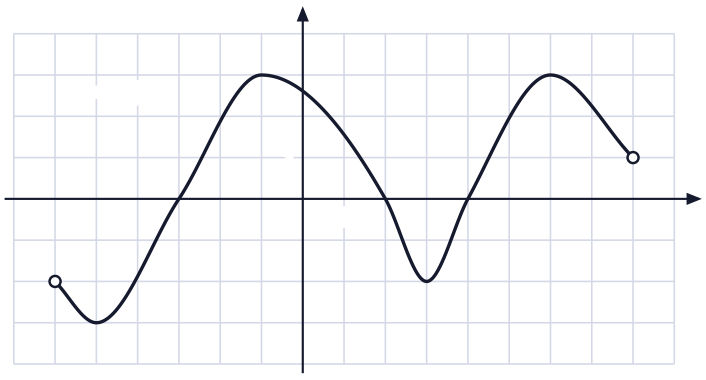
Решение.

Число подписчиков должно вырасти в $16\,000 : 500 = 32$ раза. Каждый месяц — умножение на 2, поэтому число месяцев равно $\log_2 32$. Так как $32 = 2^5$, получаем $\log_2 32 = 5$.

Проверка по месяцам: 1000, 2000, 4000, 8000, $16\,000$ — пять удвоений.

Ответ: 5.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6;\ 8)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: 5

Решение.

$f'(x) > 0$ на интервалах $(-3;\ 2)$ и $(4;\ 8)$. Их длины $2 - (-3) = 5$ и $8 - 4 = 4$. Наибольшая длина равна 5.

Ответ: 5.

9 Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 24$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 4$ м/с². За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 64 метра. Ответ дайте в секундах.

Ответ: 4

Решение.

$24t - 2t^2 = 64 \iff t^2 - 12t + 32 = 0$, корни $t = 4$ и $t = 8$.

Торможение длится $\dfrac{24}{4} = 6$ с, поэтому $t = 8$ не подходит.

Ответ: 4.

10 Турист первые 2 часа ехал на автобусе со скоростью 50 км/ч, затем 120 км проехал на поезде со скоростью 60 км/ч, последний час ехал на автомобиле со скоростью 80 км/ч. Найдите среднюю скорость туриста на всём пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 60

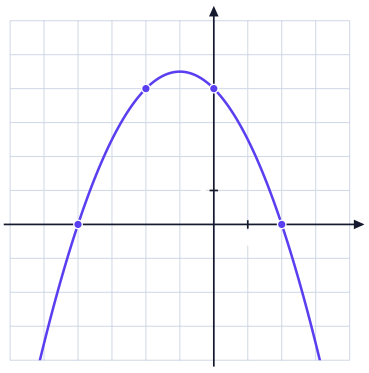
Решение.

Первый участок: $50 \cdot 2 = 100$ км. Второй участок: $120 : 60 = 2$ ч. Третий участок: $80 \cdot 1 = 80$ км.

$$v_{\text{ср}} = \frac{100 + 120 + 80}{2 + 2 + 1} = \frac{300}{5} = 60.$$

Ответ: 60.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите значение коэффициента b.



Ответ: -1

Решение.

Парабола пересекает ось x в точках -4 и 2, поэтому $f(x) = a(x + 4)(x - 2)$.

Точка $(0;\ 4)$: $4 = a \cdot 4 \cdot (-2)$, $a = -0{,}5$. Раскроем скобки:

$$f(x) = -0{,}5(x^2 + 2x - 8) = -0{,}5x^2 - x + 4.$$

Проверка по точке $(-2;\ 4)$: $-0{,}5 \cdot 4 + 2 + 4 = 4$. Коэффициент при x равен -1.

Ответ: -1.

12 Найдите абсциссу точки минимума функции f(x)=x+16/x при x>0.

Ответ: 4

Решение. f′(x)=1−16/x². На (0;4) производная отрицательна, на (4;+∞) положительна; минимум при x=4.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\sin 3x = \sin x$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие промежутку $[0;\ 2\pi]$.

Ответ: а) $x = \pi n; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}$.
б) $0;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4};\ \pi;\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4};\ 2\pi$.

Решение.

Способ: разложение на множители.

1. Разность синусов: $\sin 3x - \sin x = 2\cos 2x \sin x = 0$.
2. Отсюда $\sin x = 0$ или $\cos 2x = 0$. Из $\cos 2x = 0$ получаем $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.
3. Общий ответ: $x = \pi n; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z}$.
4. Серия $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$: подходящие значения n: $0; 1; 2$.
5. Серия $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$: подходящие значения n: $0; 1; 2; 3$.
6. После отбора по заданным границам: $0;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4};\ \pi;\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4};\ 2\pi$.

Типичная ошибка. Период серии для $\cos 2x = 0$ равен $\frac{\pi}{2}$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона основания равна 6, высота SO равна 4. O — центр основания, M — середина AB.

а) Докажите, что AB⊥(SOM).

б) Найдите расстояние от O до плоскости SAB.

Ответ: б) 12/5

Решение. а) $OM \perp AB$ в квадрате. Прямая через M, параллельная SO, лежит в плоскости SOM и тоже перпендикулярна AB. Эти прямые пересекаются, следовательно, $AB \perp (SOM)$.
б) Плоскости SOM и SAB пересекаются по SM. Перпендикуляр из O к SM в плоскости SOM перпендикулярен также AB и потому всей плоскости SAB. В прямоугольном треугольнике SOM имеем OM=3, SO=4, SM=5. Высота из O к SM равна $SO \cdot OM / SM = 12/5$.

15 Решите неравенство $\log_{0{,}5}(x^2 - 5x + 6) \geq -1$.

Ответ: $[1;\ 2) \cup (3;\ 4]$

Решение. Основание меньше 1: $0 < x^2 - 5x + 6 \leq 2$. Из $x^2 - 5x + 4 \leq 0$: $1 \leq x \leq 4$; из $(x-2)(x-3) > 0$: $x < 2$ или $x > 3$.

16 Фирма продаёт товар по цене p тыс. руб. и продаёт за месяц $(200 - 2p)$ штук. Себестоимость единицы — 20 тыс. руб. Найдите наибольшую месячную прибыль.

Ответ: 3 200 000 руб.

Решение. $\Pi(p) = (p - 20)(200 - 2p)$, корни 20 и 100, вершина $p = 60$. $\Pi = 40 \cdot 80 = 3200$ тыс. руб.

17 Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, касается гипотенузы AB в точке K.
а) Докажите, что площадь треугольника равна $AK \cdot KB$.
б) Найдите площадь треугольника, если $AK = 3$, $KB = 10$.

Ответ: б) 30

Решение. а) $AK = p - a$, $KB = p - b$, $(p-a)(p-b) = \dfrac{c^2 - (a-b)^2}{4} = \dfrac{ab}{2}$ (так как $c^2 = a^2 + b^2$). б) $S = 3 \cdot 10 = 30$.

18 Найдите все значения a, при которых система |x|+|y|=1, x+y=a имеет ровно две различные пары решений.

Ответ: a∈(−1;1)

Решение. На ромбе |x|+|y|=1 сумма x+y принимает значения от −1 до 1. При |a|<1 прямая x+y=a пересекает две противоположные стороны ромба ровно в двух точках. При a=±1 прямая совпадает с целой стороной (решений бесконечно много), при |a|>1 пересечений нет.

19 Натуральное число n удовлетворяет условию: n^2+n+1 делится на 7.

а) Подходит ли n=2?

б) Подходит ли n=3?

в) Сколько подходящих чисел от 1 до 2027 включительно?

Ответ: а) да; б) нет; в) 580

Решение. По модулю 7 проверяем остатки n=0,1,…,6: значения n^2+n+1 равны 1,3,0,6,0,3,1. Значит, подходят ровно остатки 2 и 4. Для n=2 — да, для n=3 — нет. Число 2027=7·289+4, в 289 полных блоках по два решения и в хвосте 1,2,3,4 ещё два. Итого 289·2+2=580.