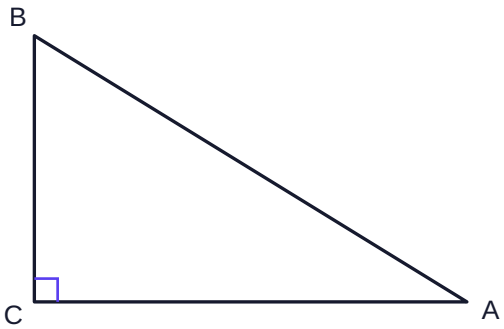
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = \dfrac{7}{25}$, $AB = 50$. Найдите BC.



Ответ: 48

Решение.

$\sin A = \sqrt{1 - \dfrac{49}{625}} = \sqrt{\dfrac{576}{625}} = \dfrac{24}{25}$. Тогда $BC = AB \cdot \sin A = 50 \cdot \dfrac{24}{25} = 48$.

Ответ: 48.

2 Дрон доставки вылетел со склада. Сначала он сместился на 900 м к востоку и на 200 м к югу, затем на 300 м к западу и на 1000 м к северу. На каком расстоянии по прямой от склада оказался дрон? Ответ дайте в метрах.

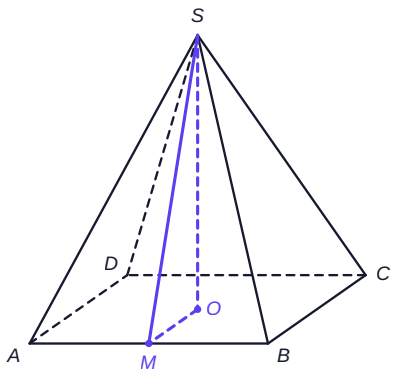
Ответ: 1000

Решение.

Ось x направим на восток, ось y — на север. Первое перемещение: $(900;\ -200)$, второе: $(-300;\ 1000)$. Сумма: $(900 - 300;\ -200 + 1000) = (600;\ 800)$. Расстояние от склада: $\sqrt{600^2 + 800^2} = \sqrt{1\,000\,000} = 1000$ м.

Ответ: 1000.

3 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 10, высота равна 12. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Ответ: 260

Решение.

$SM = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$. Каждая боковая грань имеет площадь $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 13 = 65$:

$$S_{\text{бок}} = 4 \cdot 65 = 260.$$

Ответ: 260.

4 Вероятность того, что новый пылесос в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,065. В некотором городе из 1000 проданных пылесосов в течение года в гарантийную мастерскую поступило 70 штук. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Ответ: 0,005

Решение.

Частота $W = \frac{70}{1000} = 0{,}07$. Разность $0{,}07 - 0{,}065 = 0{,}005$.

Ответ: 0,005.

5 Два ученика независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Первый решит её с вероятностью 0,8, второй — с вероятностью 0,6. Найдите вероятность того, что задачу решит ровно один из них.

Ответ: 0,44

Решение.

Решил только первый: $0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32$. Решил только второй: $0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$. Варианты несовместны:

$$P = 0{,}32 + 0{,}12 = 0{,}44.$$

Ответ: 0,44.

6 Найдите корень уравнения $\dfrac{x^2-x-12}{x-4}=0$.

Ответ: -3

Решение.

ОДЗ: $x \neq 4$. Числитель: $x^2-x-12=0$, $D=1+48=49$, $x=\dfrac{1\pm 7}{2}$, то есть $x=4$ или $x=-3$.

При $x=4$ знаменатель равен нулю, этот корень вычёркиваем.

Ответ: −3.

7 Найдите значение выражения $\log_3 81-\log_2 \dfrac{1}{8}$.

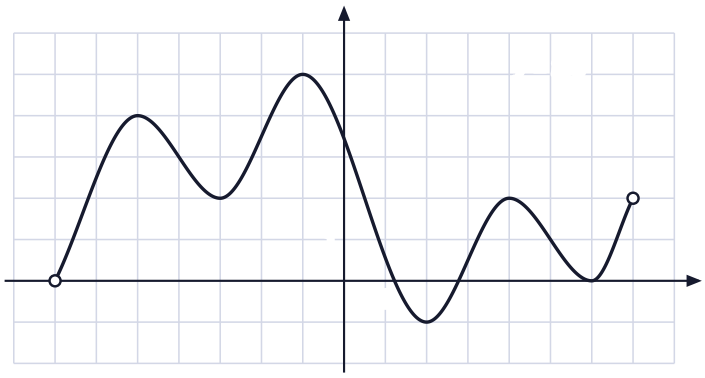
Ответ: 7

Решение.

$\log_3 81=\log_3 3^4=4$, $\log_2 \dfrac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3$. Разность: $4-(-3)=7$.

Ответ: 7.

8 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-7;\ 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y=5$ или совпадает с ней.



Ответ: 6

Решение.

Касательная параллельна прямой $y=5$, если $f'(x_0)=0$. Это точки экстремума: максимумы при $x=-5$, $x=-1$, $x=4$ и минимумы при $x=-3$, $x=2$, $x=6$. Всего 6 точек.

Ответ: 6.

9 Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку. Её нагревательный элемент разогревается по закону $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1300$ К, $a = -8$ К/мин², $b = 160$ К/мин. При температуре выше 1900 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор? Ответ дайте в минутах.

Ответ: 5

Решение.

$1300 + 160t - 8t^2 = 1900 \iff 8t^2 - 160t + 600 = 0 \iff t^2 - 20t + 75 = 0$, корни $t = 5$ и $t = 15$.

Температура впервые достигает 1900 К через 5 минут, позже она стала бы выше допустимой.

Ответ: 5.

10 Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 60 км/ч, вторую половину — со скоростью 90 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 72

Решение.

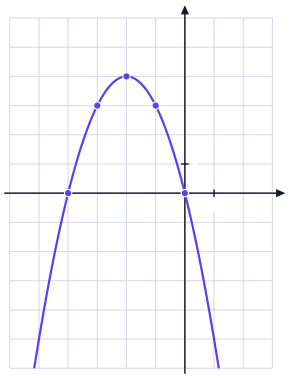
Пусть весь путь равен 360 км. Первая половина заняла $180 : 60 = 3$ ч, вторая $180 : 90 = 2$ ч.

$$v_{\text{ср}} = \frac{360}{3 + 2} = 72 \text{ км/ч}.$$

По общей формуле: $\dfrac{2 \cdot 60 \cdot 90}{60 + 90} = \dfrac{10800}{150} = 72$.

Ответ: 72.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(5)$.



Ответ: -45

Решение.

Вершина параболы — точка $(-2;\ 4)$, ветви направлены вниз. Запишем $f(x) = a(x + 2)^2 + 4$.

Точка $(0;\,0)$: $0 = 4a + 4$, $a = -1$. Проверка шагами: от вершины значения уменьшаются на 1, затем на 3 — точки $(-1;\,3)$ и $(0;\,0)$ лежат на графике.
$f(5) = -(5+2)^2 + 4 = -49 + 4 = -45$.
Ответ: -45.

12 Найдите абсциссу точки минимума функции f(x)=x³−6x²+9x+5.

Ответ: 3

Решение. f′(x)=3(x−1)(x−3). Производная меняет знак с минуса на плюс при x=3, поэтому минимум в точке x=3.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.
б) Найдите все его корни, принадлежащие промежутку $[-2\pi;\,0]$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n;\quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$.
б) $-\frac{11\pi}{6};\ -\frac{7\pi}{6};\ -\frac{\pi}{2}$.

Решение.

Способ: сведение к квадратному уравнению.

1. Пусть $t = \sin x$, тогда $-1 \le t \le 1$. Получаем $2t^2 + t - 1 = (2t-1)(t+1) = 0$.
2. Оба корня допустимы: $t = \frac{1}{2}$ и $t = -1$. Возвращаемся к синусу и записываем все серии решений.
3. Общий ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n;\quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$.
4. Серия $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\, n \in \mathbb{Z}$: подходящие значения n: -1.
5. Серия $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\, n \in \mathbb{Z}$: подходящие значения n: -1.
6. Серия $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\, n \in \mathbb{Z}$: подходящие значения n: 0.
7. После отбора по заданным границам: $-\frac{11\pi}{6};\ -\frac{7\pi}{6};\ -\frac{\pi}{2}$.

Типичная ошибка. После замены проверьте, что каждый корень t лежит в отрезке $[-1;\,1]$, и используйте оба подходящих корня.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 6 точки M и N — середины AB и AD соответственно.
а) Докажите, что MN параллельна плоскости A_1BD.
б) Найдите расстояние от M до плоскости A_1BD.

Ответ: б) √3

Решение. а) В треугольнике ABD отрезок MN — средняя линия, поэтому MN∥BD. Прямая BD лежит в плоскости A_1BD, а MN ей параллельна и не лежит в этой плоскости. Следовательно, MN∥(A_1BD).
б) В координатах A=(0,0,0), B=(6,0,0), D=(0,6,0), A_1=(0,0,6), M=(3,0,0). Плоскость A_1BD имеет уравнение x+y+z=6. Расстояние от M до неё равно |3−6|/√3=√3.

15 Решите неравенство $\log_2(x+3)+\log_2(x-1)\le 5$.

Ответ: $(1;\,5]$

Решение. ОДЗ $x>1$. $(x+3)(x-1)\le 32 \iff x^2+2x-35\le 0 \iff -7\le x\le 5$. С учётом ОДЗ: $1<x\le 5$.

16 Кредит 4 млн руб. на 2 года под 20 % (стандартная схема). Второй платёж в 2 раза больше первого. Найдите общую сумму выплат.

Ответ: 5 400 000 руб.

Решение. $(4{,}8-X)\cdot 1{,}2=2X \Rightarrow 5{,}76=3{,}2X \Rightarrow X=1{,}8$; второй платёж $3{,}6$. $\Sigma=5{,}4$ млн руб.

17 Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O.
а) Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.
б) Найдите площадь трапеции, если площади треугольников BOC и AOD равны 4 и 9.

Ответ: б) 25

Решение. а) $S_{ABD}=S_{ACD}$ (общее основание AD, равные высоты); вычитаем S_{AOD}. б) $\triangle BOC\sim\triangle DOA$, $k=\dfrac{2}{3}$; $S_{AOB}=\sqrt{S_{BOC}\cdot S_{AOD}}=6$; $S=4+9+6+6=25$.

18 Найдите все значения a, при которых уравнение $x^4-2x^2=a$ имеет ровно четыре различных действительных корня.

Ответ: a∈(−1;0)

Решение. Положим $t=x^2\ge 0$. Уравнение $t^2-2t=a$ имеет корни $t_1=1-\sqrt{1+a}$ и $t_2=1+\sqrt{1+a}$. Четыре различных x получаются тогда и только тогда, когда оба t строго положительны и различны: $a>-1$ и $a<0$. При $a=-1$ есть только два корня, при $a=0$ — три, при остальных значениях не четыре.

19 Числа от 1 до 10 размещают по кругу, считая одинаковыми размещения, получающиеся поворотом или отражением. Сумма любых двух соседних чисел должна быть нечётной.

а) Можно ли разместить все 10 чисел?

б) Можно ли таким же образом разместить числа от 1 до 9?

в) Сколько различных размещений чисел от 1 до 10 существует?

Ответ: а) да; б) нет; в) 1440

Решение. Соседние числа должны быть разной чётности, значит, чётные и нечётные чередуются. Для 10 чисел их по пять: расположим нечётные по кругу, а чётные в пяти промежутках, поэтому а) да. Для 9 чисел замкнутое чередование невозможно, поскольку длина цикла нечётна.

в) Зафиксируем 1, чтобы исключить повороты. Остальные четыре нечётных располагаются 4! способами, пять чётных — 5! способами. Отражение переводит каждое размещение в другое (все метки различны), поэтому делим на 2: $4!\cdot 5!/2=1440$.