Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 25 и 9 соответственно, а боковая сторона равна 10. Найдите площадь трапеции.



Ответ: 102

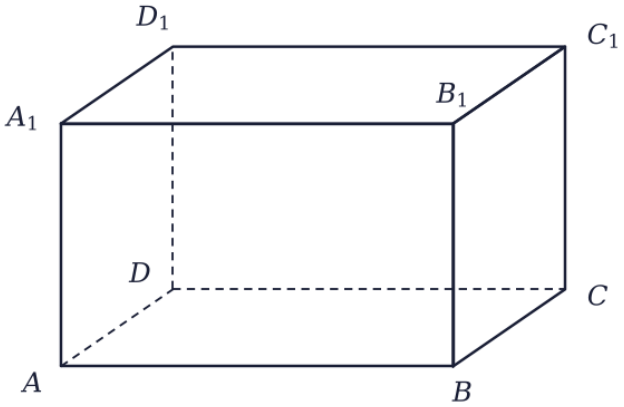
Решение. Проекция боковой стороны на большее основание равна $\dfrac{25-9}{2}=8$, высота $h=\sqrt{10^2-8^2}=6$, $S=\dfrac{25+9}{2}\cdot 6=102$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(-5;\ -2)$ и $\vec{b}\,(-3;\ -1)$. Найдите длину вектора $3\vec{a}-\vec{b}$.

Ответ: 13

Решение. $3\vec{a}-\vec{b}=(-12;\ -5)$, $|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{144+25}=13$.

3 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB=14$, $BC=8$, $AA_1=8$. Найдите длину диагонали AC_1.



Ответ: 18

Решение. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений: $AC_1 = \sqrt{14^2 + 8^2 + 8^2} = \sqrt{324} = 18$.

4 В коробке лежат 32 одинаковых на вид чайных пакетиков: 4 пакетика с зелёным чаем, 8 — с белым, остальные — с чёрным. Найдите вероятность того, что случайно выбранный пакетик окажется с чёрным чаем.

Ответ: 0,625

Решение. Пакетиков с чёрным чаем $32 - 4 - 8 = 20$; $P = \dfrac{20}{32} = 0{,}625$.

5 В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,4 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Ответ: 0,84

Решение. Оба автомата неисправны с вероятностью $0{,}4^2 = 0{,}16$. Хотя бы один исправен: $1 - 0{,}16 = 0{,}84$.

6 Найдите корень уравнения $3^{x+5} = 81$.

Ответ: -1

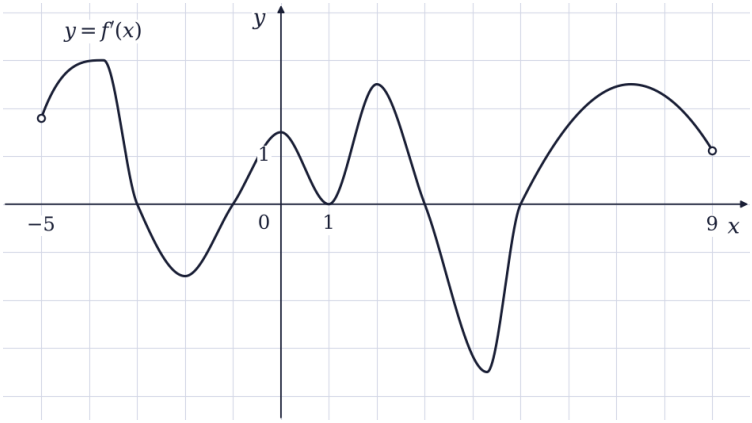
Решение. $81 = 3^4$, поэтому $x + 5 = 4$, $x = -1$.

7 Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin 74^\circ}{\sin 37^\circ \cdot \sin 53^\circ}$.

Ответ: 4

Решение. $\sin 53^\circ = \cos 37^\circ$, а $\sin 74^\circ = 2\sin 37^\circ \cos 37^\circ$, поэтому выражение равно $2 \cdot 2 = 4$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 2

Решение. В точке максимума производная меняет знак с «+» на «−». Таких точек 2: $-3;\ 3$.

9 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 30t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 40 метров?

Ответ: 2

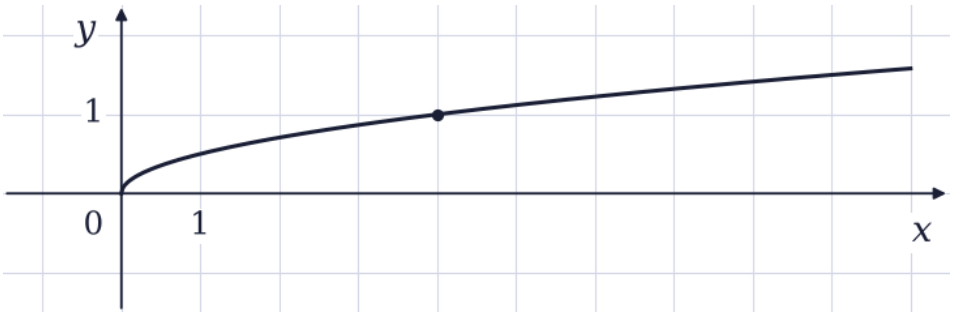
Решение. $h(t) \geqslant 40 \iff 5t^2 - 30t + 40 \leqslant 0 \iff 2 \leqslant t \leqslant 4$. Мяч находится не ниже 40 м в течение $4 - 2 = 2$ с.

10 Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 100 литров она заполняет на 5 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: 4

Решение. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{100}{x} - \dfrac{100}{x+1} = 5$, положительный корень $x = 4$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(64)$.



Ответ: 4

Решение. График проходит через точку $(4;\ 1)$: $1 = k\sqrt{4}$, $k = 0{,}5$. $f(64) = 0{,}5 \cdot \sqrt{64} = 4$.

12 Найдите точку максимума функции y = 8ln x − x + 127.

Ответ: 8

Решение. Область определения: x > 0. Производная y′ = 8/x − 1. Она положительна при 0 < x < 8 и отрицательна при x > 8. Точка максимума x = 8.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x + 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$**; б)** $-\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, а $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Уравнение принимает вид

$$\left(2\cos^2 x - 1\right) + 2\cos x = -1 \iff \cos^2 x + \cos x = 0.$$

Отсюда $\cos x = 0$ или $\cos x = -1$.

Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos x = -1$, то $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$-\pi \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi k \leqslant \frac{\pi}{2} \iff -\frac{3}{2} \leqslant k \leqslant 0$, $k \in \{-1, 0\}$: $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$.

$-\pi \leqslant \pi + 2\pi n \leqslant \frac{\pi}{2} \iff -1 \leqslant n \leqslant -\frac{1}{4}$, $n \in \{-1\}$: $x = -\pi$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}; \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 6, боковое ребро равно 8.

а) Докажите, что проекция AC_1 на плоскость ABC — отрезок AC.

б) Найдите синус угла между AC_1 и плоскостью ABC.

Ответ: б) 4/5

Решение. Боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания. Точка A уже лежит в ABC, а C_1 проектируется в C, поэтому проекция AC_1 — AC. В прямоугольном ACC_1 имеем AC=6, CC_1=8, AC_1=10. Синус угла прямой с плоскостью равен CC_1/AC_1=4/5.

15 Решите неравенство

$$\frac{4^x-6\cdot 2^{x+1}+32}{\log_5(x+3)}\geqslant 0.$$

Ответ: $(-2;\,2]\cup[3;\,+\infty)$

Решение. Область допустимых значений: $x+3>0$ и $\log_5(x+3)\neq 0$, то есть $x>-3$, $x\neq -2$.

$6\cdot 2^{x+1}=12\cdot 2^x$, числитель раскладывается на множители: $4^x-12\cdot 2^x+32=(2^x-4)(2^x-8)$.

Функции $y=2^t$ и $y=\log_5 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак 2^x-4 совпадает со знаком $x-2$, знак 2^x-8 — со знаком $x-3$, знак $\log_5(x+3)=\log_5(x+3)-\log_5 1$ — со знаком $x+2$. Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x+2}\geqslant 0,\quad x>-3.$$

Метод интервалов: на $(-3;\,-2)$ дробь отрицательна; на $(-2;\,2)$ дробь положительна; на $(2;\,3)$ дробь отрицательна; на $(3;\,+\infty)$ дробь положительна; в точках $x=2$, $x=3$ числитель равен нулю.

Ответ: $(-2;\,2]\cup[3;\,+\infty)$.

16 Кредит 3,64 млн руб. на 3 года под 20 % (стандартная схема) погашается тремя равными платежами. Найдите платёж.

Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 1 728 000 руб.

Решение. $3{,}64\cdot 1{,}728=X(1{,}44+1{,}2+1)=3{,}64X\Rightarrow X=1{,}728$ млн руб.

17 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD.

а) Докажите, что $AB=2AD$.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AD=\dfrac{15}{2}$, $AK=12$.

Ответ: б) 108

Решение. а) Прямые AB и CD параллельны, поэтому $\angle AKD=\angle KAB$ как накрест лежащие углы. AK — биссектриса, поэтому $\angle KAB=\angle KAD$. Значит, $\angle AKD=\angle KAD$, и треугольник ADK равнобедренный: $DK=AD$. Аналогично треугольник BCK

равнобедренный: $CK = BC = AD$. Тогда $AB = CD = DK + KC = 2AD$.
б) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к стороне AB, равна 180°, поэтому $\angle KAB + \angle KBA = 90^\circ$ и $\angle AKB = 90^\circ$. Треугольник ABK и параллелограмм имеют общее основание AB и одинаковую высоту (расстояние между прямыми AB и CD), поэтому $S_{ABCD} = 2S_{ABK} = AK \cdot BK$. По пункту а) $AB = 2AD = 15$. Из прямоугольного треугольника ABK: $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. $S_{ABCD} = 12 \cdot 9 = 108$.
Ответ: б) 108.

18 Найдите все значения a, при которых уравнение $x^3-3x=a$ имеет ровно три различных действительных корня.

Ответ: $a\in(-2;2)$

Решение. Функция $f(x)=x^3-3x$ возрастает на $(-\infty;-1]$, убывает на $[-1;1]$ и возрастает на $[1;+\infty)$, поскольку $f'(x)=3(x^2-1)$. Локальный максимум $f(-1)=2$, минимум $f(1)=-2$. Прямая $y=a$ пересекает три монотонные ветви в трёх различных точках ровно при $-2<a<2$. При $a=\pm2$ два корня совпадают, за этими границами корень один.

19 Трёхзначное число с ненулевыми цифрами делят на произведение его цифр.
а) Может ли получиться частное 8?
б) Может ли получиться частное 222?
в) Каково наибольшее возможное частное?

Ответ: а) да; б) нет; в) 111

Решение. Пусть цифры $a,b,c\in\{1,\ldots,9\}$. Тогда частное $(100a+10b+c)/(abc)=100/(bc)+10/(ac)+1/(ab)$. Поскольку каждое произведение в знаменателе не меньше 1, частное не превосходит $100+10+1=111$. Равенство достигается на числе 111.
а) Для числа 128 частное $128/(1\cdot2\cdot8)=8$. б) 222 больше верхней границы 111 и потому невозможно.