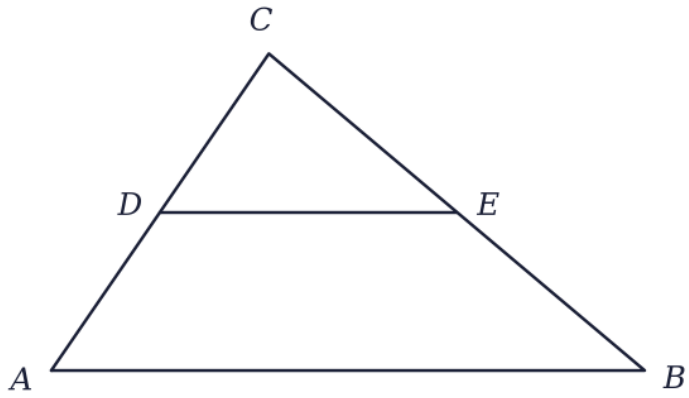
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 Площадь треугольника ABC равна 36, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



Ответ: 27

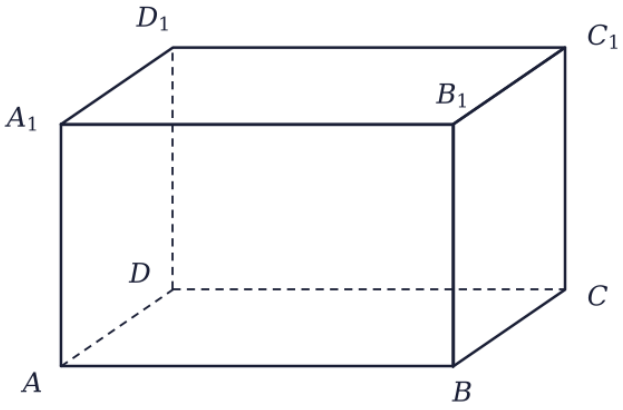
Решение. Треугольник CDE подобен треугольнику CAB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, его площадь $\frac{36}{4} = 9$. Площадь трапеции: $36 - 9 = 27$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(-4;\ 3)$ и $\vec{b}\,(-4;\ 3)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: 25

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 = 25$.

3 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 8$, $BC = 4$, $AA_1 = 1$. Найдите объём треугольной призмы $ABDA_1B_1D_1$.



Ответ: 16

Решение. Основание призмы — треугольник ABD площадью $\frac{8 \cdot 4}{2}$, высота $AA_1 = 1$. $V = \frac{8 \cdot 4}{2} \cdot 1 = 16$.

4 В сборнике билетов по математике всего 50 билетов, в 44 из них встречается вопрос по теме «Вписанная окружность». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по этой теме.

Ответ: 0,12

Решение. Билетов без вопроса по этой теме $50 - 44 = 6$, $P = \frac{6}{50} = 0{,}12$.

5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первые три мишени и не попадёт в последнюю.

Ответ: 0,1024

Решение. Выстрелы независимы: $P = 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}1024$.

6 Найдите корень уравнения $\log_2(3x + 3) = \log_2(x - 5) + 2$.

Ответ: 23

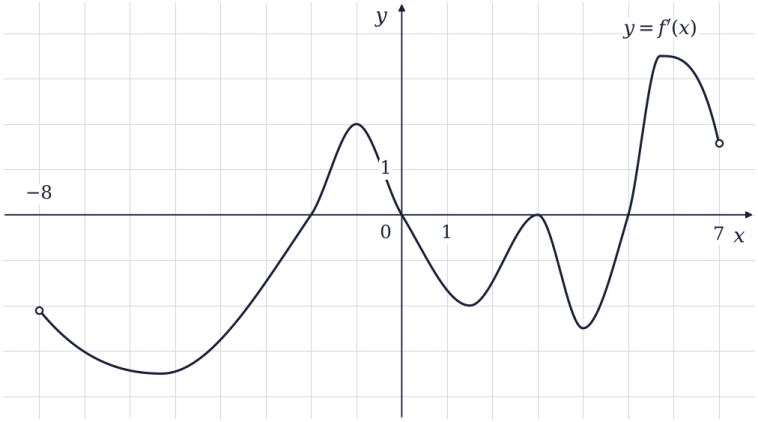
Решение. $2 = \log_2 4$, поэтому $3x + 3 = 4(x - 5)$, откуда $x = 23$; при этом значении оба аргумента логарифмов положительны.

7 Найдите значение выражения $216^{\log_6 5}$.

Ответ: 125

Решение. $216^{\log_6 5} = \left(6^{\log_6 5}\right)^3 = 5^3 = 125$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8;\ 7)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 1

Решение. В точке максимума производная меняет знак с «+» на «−». Такая точка одна: $x = 0$.

9 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1 + 24t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 17 метров?

Ответ: 3,2

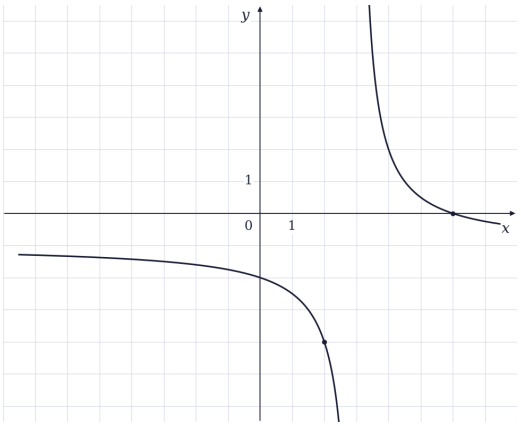
Решение. $h(t) \geqslant 17 \iff 5t^2 - 24t + 16 \leqslant 0 \iff 0{,}8 \leqslant t \leqslant 4$. Мяч находится не ниже 17 м в течение $4 - 0{,}8 = 3{,}2$ с.

10 Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 120 литров она заполняет на 10 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: 6

Решение. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{x+6} = 10$, положительный корень $x = 6$.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{k}{x+a}+b$, где числа a, b и k — целые. Найдите значение $f(-12)$.



Ответ: -1,2

Решение. Асимптоты графика: $x=3$ и $y=-1$, поэтому $a=-3$, $b=-1$. По точке $(2;\ -4)$: $-4=\dfrac{k}{-1}-1$, откуда $k=3$. $f(-12)=\dfrac{3}{-15}-1=-1{,}2$.

12 Найдите точку максимума функции $y=x^2e^{8-x}$ на промежутке $(0;+\infty)$.

Ответ: 2

Решение. Производная $y'=e^{8-x}x(2-x)$. При $0<x<2$ она положительна, при $x>2$ отрицательна. Значит, точка максимума $x=2$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x-5\sin(x-\pi)=4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\ -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$**; б)** $-\dfrac{7\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\sin(x-\pi)=-\sin x$, а $\cos 2x=1-2\sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$\left(1-2\sin^2 x\right)+5\sin x=4\ \Leftrightarrow\ 2\sin^2 x-5\sin x+3=0.$$

Отсюда $\sin x=1$ или $\sin x=1{,}5$. Уравнение $\sin x=1{,}5$ корней не имеет, так как $|1{,}5|>1$. Если $\sin x=1$, то $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\ -\dfrac{5\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$-4\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2}+2\pi k \leqslant -\dfrac{5\pi}{2} \iff -\dfrac{9}{4} \leqslant k \leqslant -\dfrac{3}{2}, k\in\{-2\}: x=-\dfrac{7\pi}{2}.$

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{2}$.

14

В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона основания равна 6, а высота SO=4, где O — центр основания; M — середина AB.

а) Докажите, что SM⊥AB.

б) Найдите синус угла между плоскостями SAB и ABCD.

Ответ: б) 4/5

Решение. В квадрате OM⊥AB. Также SO⊥(ABCD), в частности SO⊥AB. Прямые SO и OM пересекаются в O и лежат в плоскости SOM, поэтому AB⊥(SOM), откуда AB⊥SM. Линейный угол двугранного угла — ∠SMO. В прямоугольном SOM имеем OM=3, SO=4, SM=5, следовательно sin∠SMO=4/5.

15

Решите неравенство

$$\frac{4^x-5\cdot 2^{x+1}+16}{\log_3(x+3)}\geqslant 0.$$

Ответ: $(-2;\ 1]\cup[3;\ +\infty)$

Решение. Область допустимых значений: $x+3>0$ и $\log_3(x+3)\ /\ 0$, то~есть $x>-3$, $x\ /\ =-2$.

$5\cdot 2^{x+1}=10\cdot 2^x$, числитель раскладывается на множители: $4^x-10\cdot 2^x+16=(2^x-2)(2^x-8)$.

Функции $y=2^t$ и $y=\log_3 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак 2^x-2 совпадает со знаком $x-1$, знак 2^x-8 — со знаком $x-3$, знак $\log_3(x+3)=\log_3(x+3)-\log_3 1$ — со знаком $x+2$. Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{(x-1)(x-3)}{x+2}\geqslant 0,\quad x>-3.$$

Метод интервалов: на $(-3;\ -2)$ дробь отрицательна; на $(-2;\ 1)$ дробь положительна; на $(1;\ 3)$ дробь отрицательна; на $(3;\ +\infty)$ дробь положительна; в точках $x=1$, $x=3$ числитель равен нулю.

Ответ: $(-2;\ 1]\cup[3;\ +\infty)$.

16

Кредит взят на 2 года под 10 % (стандартная схема) и погашен двумя равными платежами по 1 210 000 руб. Найдите сумму кредита.

Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 2 100 000 руб.

Решение. $S=\dfrac{1{,}21}{1{,}1}+\dfrac{1{,}21}{1{,}21}=1{,}1+1=2{,}1$ млн руб.

17 В равнобедренной трапеции ABCD основания AD=18 и BC=8, боковые стороны AB=CD=13. Диагонали AC и BD пересекаются в O.

а) Докажите AO:OC=9:4.

б) Найдите площадь треугольника AOD.

Ответ: б) 972/13

Решение. Из AD∥BC и вертикальных углов следует подобие треугольников AOD и COB. Поэтому AO/OC=AD/BC=18/8=9/4. Горизонтальная проекция боковой стороны равна (18−8)/2=5, высота трапеции √(13²−5²)=12. Точка O делит диагональ AC в отношении 9:4, значит её расстояние от основания AD равно 12·9/13=108/13. Площадь AOD равна 18·(108/13)/2=972/13.

18 Найдите все значения a, при которых неравенство $x^2-2ax+4>0$ выполняется при каждом $x\in[-1;2]$.

Ответ: $a\in(-5/2;2)$

Решение. При x=0 выражение равно 4>0. Если x>0, условие эквивалентно a<x/2+2/x. На (0;2] правая часть убывает до значения 2 при x=2 (по неравенству между средними она не меньше 2); требуется a<2. Если x<0, при делении знак меняется: a>x/2+2/x. На [−1;0) эта функция строго убывает, поэтому её наибольшее значение равно −1/2−2=−5/2 в точке x=−1. Требуется a>−5/2. Оба строгих условия вместе достаточны и необходимы.

19 В таблице 6×6 записаны натуральные числа от 1 до 6. Петя сложил минимумы шести строк, а Вася — минимумы шести столбцов.

а) Может ли сумма Пети быть вдвое больше суммы Васи?

б) Может ли она быть в шесть раз больше?

в) Во сколько раз самое большее она может превосходить сумму Васи?

Ответ: а) да; б) нет; в) 31/6

Решение. Пусть m — наименьший элемент всей таблицы. Он лежит в некоторой строке. Сумма минимумов строк P≤m+5·6=m+30, а сумма минимумов столбцов V≥6m, так как любой элемент не меньше m. Поэтому P/V≤(m+30)/(6m)=1/6+5/m≤31/6<6. Это доказывает б) и верхнюю границу в). Граница достигается, если вся первая строка состоит из единиц, а остальные пять строк — из шестёрок: P=31, V=6.

а) Возьмём строки, целиком заполненные соответственно числами 1,3,2,2,2,2. Тогда P=12, в каждом столбце минимум 1, V=6 и P/V=2.