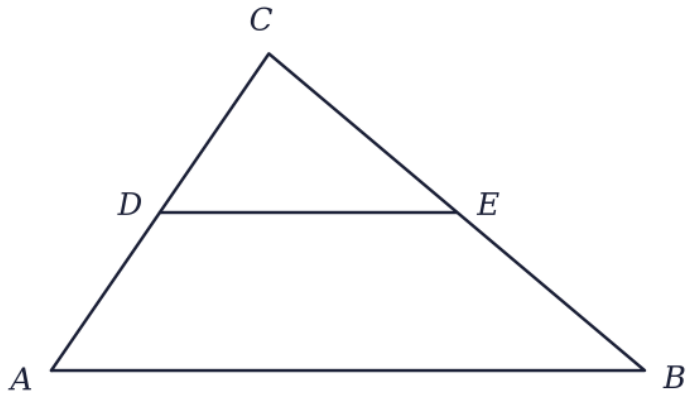
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 Площадь треугольника ABC равна 52, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь треугольника CDE.



Ответ: 13

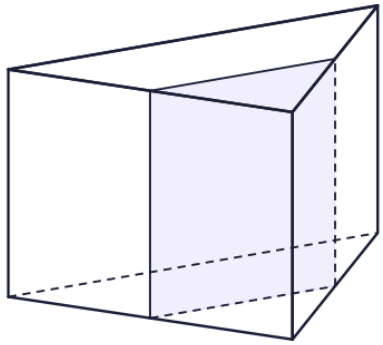
Решение. Треугольник CDE подобен треугольнику CAB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, поэтому его площадь в 4 раза меньше: $\frac{52}{4} = 13$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(4;\ 2)$ и $\vec{b}\,(-6;\ -3)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: -30

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot (-6) + 2 \cdot (-3) = -30$.

3 Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объём отсечённой треугольной призмы равен 12. Найдите объём исходной призмы.



Ответ: 48

Решение. Основание отсечённой призмы — треугольник, подобный основанию исходной с коэффициентом $\frac{1}{2}$, его площадь в 4 раза меньше. Высоты призм равны, поэтому объём исходной призмы в 4 раза больше: $4 \cdot 12 = 48$.

4 В сборнике билетов по химии всего 20 билетов, в 10 из них встречается вопрос по теме «Углеводороды». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по этой теме.

Ответ: 0,5

Решение. Билетов без вопроса по этой теме $20 - 10 = 10$, $P = \frac{10}{20} = 0{,}5$.

5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первые две мишени и не попадёт в две последние.

Ответ: 0,0081

Решение. Выстрелы независимы: $P = 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}0081$.

6 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} = 8$.

Ответ: 3

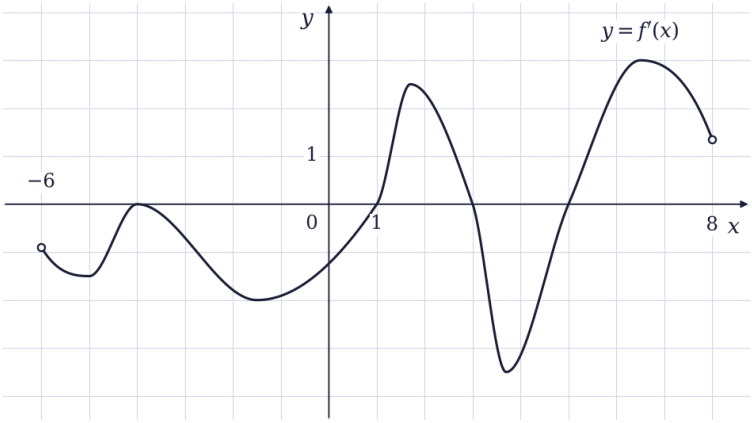
Решение. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} = 2^{6-x}$, $8 = 2^3$. Тогда $6 - x = 3$, $x = 3$.

7 Найдите значение выражения $21 \operatorname{tg} 47^\circ \cdot \operatorname{tg} 137^\circ$.

Ответ: -21

Решение. $\operatorname{tg} 137^\circ = -\operatorname{ctg} 47^\circ$, а $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, поэтому выражение равно -21.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6;\ 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 1

Решение. В точке максимума производная меняет знак с «+» на «−». Такая точка одна: $x = 3$.

9 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 6 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 40$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 16,8 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: 10

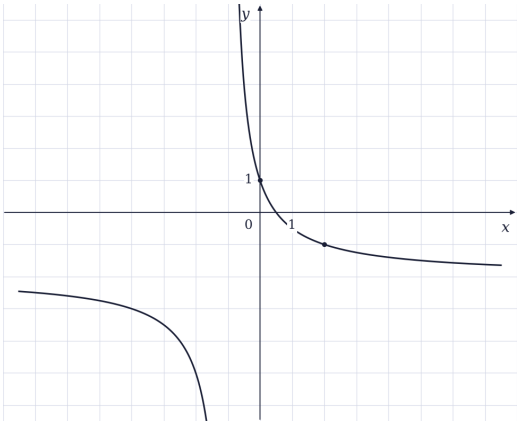
Решение. $RC = 6 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 12$. $16{,}8 = 0{,}7 \cdot 12 \cdot \log_2 \dfrac{40}{U}$, откуда $\log_2 \dfrac{40}{U} = 2$, $U = \dfrac{40}{4} = 10$.

10 Два велосипедиста одновременно отправились в 70-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 4 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 10

Решение. Пусть v — скорость второго. $\dfrac{70}{v}-\dfrac{70}{v+4}=2 \iff 2v^2+8v-280=0$, положительный корень $v=10$.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{k}{x+a}+b$, где числа a, b и k — целые. Найдите значение $f(9)$.



Ответ: -1,7

Решение. Асимптоты графика: $x=-1$ и $y=-2$, поэтому $a=1$, $b=-2$. По точке $(0;\,1)$: $1=\dfrac{k}{1}-2$, откуда $k=3$. $f(9)=\dfrac{3}{10}-2=-1{,}7$.

12 Найдите наименьшее значение функции y = x + 64/x + 121 на отрезке [4; 24].

Ответ: 137

Решение. На отрезке x > 0. Производная y′ = 1 − 64/x^2 отрицательна при x < 8 и положительна при x > 8. Минимум достигается при x = 8; y(8) = 8 + 8 + 121 = 137.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x+2\cos(\pi-x)=-1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$**; б)** $\dfrac{7\pi}{2}$**;** 4π**;** $\dfrac{9\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos(\pi-x)=-\cos x$, а $\cos 2x=2\cos^2 x-1$. Уравнение принимает вид

$$\left(2\cos^2 x-1\right)-2\cos x=-1 \iff \cos^2 x-\cos x=0.$$

Отсюда $\cos x = 0$ или $\cos x = 1$.

Если $\cos x = 0$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos x = 1$, то $x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \dfrac{9\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$3\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \pi k \leqslant \dfrac{9\pi}{2} \iff \dfrac{5}{2} \leqslant k \leqslant 4, k \in \{3, 4\}$: $x = \dfrac{7\pi}{2}, x = \dfrac{9\pi}{2}$.

$3\pi \leqslant 2\pi n \leqslant \dfrac{9\pi}{2} \iff \dfrac{3}{2} \leqslant n \leqslant \dfrac{9}{4}, n \in \{2\}$: $x = 4\pi$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{7\pi}{2}$; 4π; $\dfrac{9\pi}{2}$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 4. Точка M — середина ребра AB.

а) Докажите, что прямая CM перпендикулярна плоскости ABB_1.

б) Найдите угол между прямой A_1C и плоскостью ABB_1.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \dfrac{3\sqrt{3}}{5}$

Решение. а) Треугольник ABC равносторонний, его медиана CM является высотой: $CM \perp AB$. Призма правильная, поэтому боковое ребро AA_1 перпендикулярно плоскости основания, и $AA_1 \perp CM$. Прямая CM перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB и AA_1 плоскости ABB_1, значит, $CM \perp (ABB_1)$.

б) По пункту а) M — проекция точки C на плоскость ABB_1, поэтому A_1M — проекция прямой A_1C, и искомый угол равен $\angle CA_1M$. $CM = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, $A_1M = \sqrt{AA_1^2 + AM^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. В прямоугольном треугольнике CA_1M: $\operatorname{tg} \angle CA_1M = \dfrac{CM}{A_1M} = \dfrac{3\sqrt{3}}{5}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \dfrac{3\sqrt{3}}{5}$.

15 Решите неравенство

$$\log_2^2 x - \log_2 x \leqslant 0.$$

Ответ: $[1;\ 2]$

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Сделаем замену $t = \log_2 x$: $t^2 - t \leqslant 0 \iff t(t-1) \leqslant 0 \iff 0 \leqslant t \leqslant 1$.

Функция $y = \log_2 x$ возрастает, поэтому $0 \leqslant \log_2 x \leqslant 1 \iff 1 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $[1;\ 2]$.

16 Кредит 5,5 млн руб. взят на 2 года под 20 % (стандартная схема) и погашается двумя равными платежами. Найдите размер платежа.
Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 3 600 000 руб.

Решение. $X = \dfrac{Sq^2}{q+1} = 5{,}5 \cdot 1{,}44 : 2{,}2 = 3{,}6$ млн руб.

17 Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Прямая касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B.
а) Докажите, что угол AKB прямой.
б) Найдите AK, если радиусы окружностей равны 144 и 25.

Ответ: б) $\dfrac{1440}{13}$

Решение. а) Проведём через точку K общую касательную к окружностям; пусть она пересекает прямую AB в точке M. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны: $MA = MK$ и $MB = MK$. Значит, M — середина AB и $MK = \dfrac{AB}{2}$, то есть медиана треугольника AKB равна половине стороны AB. Поэтому $\angle AKB = 90^\circ$.
б) Из прямоугольной трапеции O_1ABO_2: $AB^2 = O_1O_2^2 - (O_1A - O_2B)^2 = (144 + 25)^2 - (144 - 25)^2 = 4 \cdot 144 \cdot 25$, $AB = 120$, $MA = MK = 60$. Точки O_1 и M равноудалены от концов отрезка AK, поэтому $O_1M \perp AK$, и AK вдвое больше высоты прямоугольного треугольника O_1AM, проведённой из вершины A: $O_1M = \sqrt{144^2 + 3600} = 156$, $AK = 2 \cdot \dfrac{O_1A \cdot AM}{O_1M} = 2 \cdot \dfrac{144 \cdot 60}{156} = \dfrac{1440}{13}$.
Ответ: б) $\dfrac{1440}{13}$.

18 Найдите все значения a, при которых прямая y=ax+3 имеет ровно одну общую точку с окружностью x²+y²=4.

Ответ: a∈{−√5/2;√5/2}

Решение. Прямая имеет ровно одну точку пересечения с окружностью радиуса 2 тогда и только тогда, когда она касается окружности. Расстояние от начала координат до прямой ax−y+3=0 равно 3/√(a²+1). Приравниваем его радиусу: 3/√(a²+1)=2, откуда a²=5/4 и a=±√5/2.

19 Множество натуральных чисел назовём хорошим, если его можно разбить на две части с одинаковым произведением элементов.

а) Является ли хорошим множество $\{100,101,\ldots,199\}$?

б) Является ли хорошим множество $\{2,4,8,\ldots,2^{200}\}$?

в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств есть у множества $\{1,3,4,5,6,7,9,11,12\}$?

Ответ: а) нет; б) да; в) 2

Решение. а) Простое число 101 есть в одном из двух произведений и не делит ни один другой элемент от 100 до 199 (его следующий кратный 202). Значит, произведения не равны.

б) Произведение степеней двойки определяется суммой показателей $1+\ldots+200=20100$. Составим 100 пар показателей $(1,200),(2,199),\ldots,(100,101)$, каждая с суммой 201. По 50 пар в каждую часть дают сумму показателей 10050 и равные произведения.

в) Возможны разбиения одного элемента против трёх либо двух против двух. Проверка произведений для данного конечного набора оставляет ровно $\{1,3,4,12\}$, поскольку $12=1\cdot3\cdot4$, и $\{3,4,9,12\}$, поскольку $3\cdot12=4\cdot9$. Для проверки полноты достаточно перебрать попарные произведения различных элементов набора и тройные произведения, равные элементу набора.