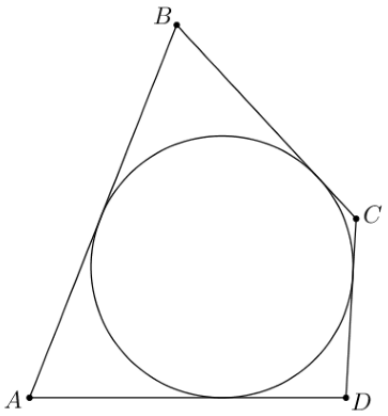
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

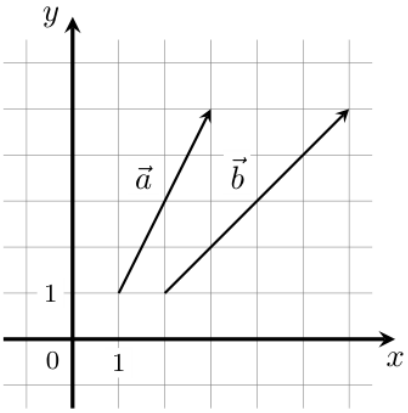
1 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 18$, $CD = 12$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



Ответ: 60

Решение. В четырёхугольнике, в который вписана окружность, суммы противоположных сторон равны: $BC + AD = AB + CD = 30$. Периметр $2 \cdot 30 = 60$.

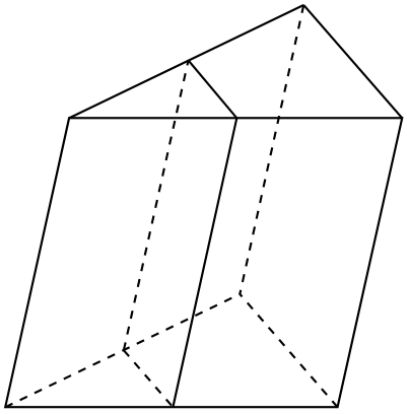
2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



Ответ: 10

Решение. По рисунку $\vec{a}\,(2;\,4)$, $\vec{b}\,(4;\,4)$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} = (6;\,8)$, его длина $\sqrt{36 + 64} = 10$.

3 Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Ответ: 12

Решение. Боковые рёбра у призм одинаковые, а периметр перпендикулярного сечения отсечённой призмы вдвое меньше: её сечение отсекается средней линией от сечения исходной призмы. Площадь боковой поверхности равна произведению этого периметра на боковое ребро, поэтому она равна $\dfrac{24}{2}=12$.

4 В сборнике билетов по математике всего 75 билетов, в 12 из них встречается вопрос по теме «Логарифмы». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопрос по теме «Логарифмы».

Ответ: 0,84

Решение. Билетов без этой темы $75-12=63$, вероятность $\dfrac{63}{75}=0{,}84$.

5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в три первые мишени и не попадёт в последнюю.

Ответ: 0,1024

Решение. Выстрелы независимы: $0{,}8^3\cdot 0{,}2=0{,}512\cdot 0{,}2=0{,}1024$.

6 Найдите корень уравнения $\log_5(20-x)=2$.

Ответ: -5

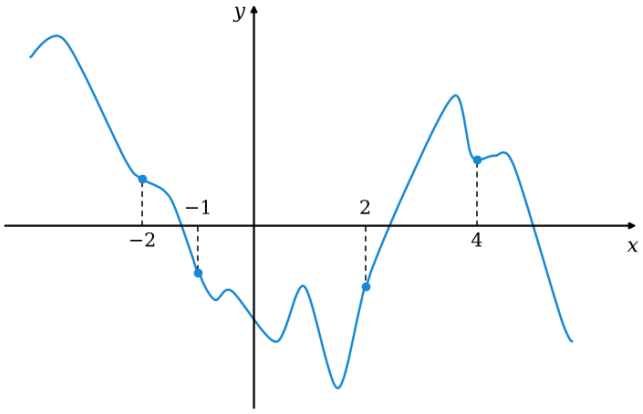
Решение. $20-x=5^2=25$, откуда $x=-5$. Аргумент логарифма $20-(-5)=25>0$.

7 Найдите значение выражения $\dfrac{2\sin 136^\circ}{\sin 68^\circ\cdot\sin 22^\circ}$.

Ответ: 4

Решение. $\sin 22^\circ = \cos 68^\circ$, поэтому знаменатель равен $\sin 68^\circ \cos 68^\circ = \dfrac{1}{2}\sin 136^\circ$. Значение выражения $\dfrac{2\sin 136^\circ}{\frac{1}{2}\sin 136^\circ} = 4$.

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -2, -1, 2, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: -1

Решение. Значение производной равно угловому коэффициенту касательной. В точке 2 функция возрастает, $f'(2) > 0$; в точке 4 касательная почти горизонтальна, $f'(4) \approx 0$. В точках -2 и -1 функция убывает, производная отрицательна, причём в точке -1 график идёт вниз заметно круче. Значит, наименьшее значение производной — в точке -1.

9 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 7 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 36$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}8$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 84 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: 4,5

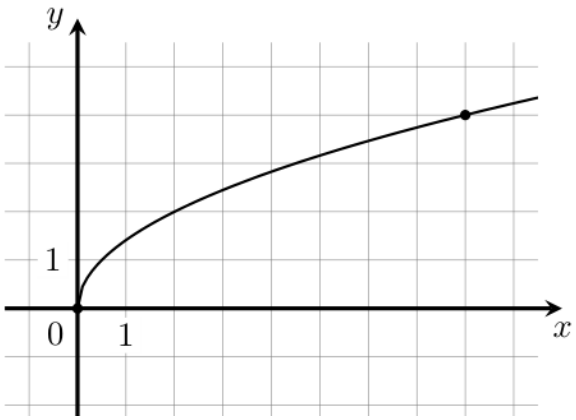
Решение. $\alpha RC = 0{,}8 \cdot 7 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 28$. Тогда $84 = 28 \log_2 \dfrac{36}{U}$, $\log_2 \dfrac{36}{U} = 3$, $U = \dfrac{36}{8} = 4{,}5$.

10 Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 72 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью, на 3 км/ч большей прежней. По дороге он сделал остановку на 2 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько и на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 12

Решение. Пусть скорость на пути из А в В равна v км/ч. Тогда $\frac{72}{v} = \frac{72}{v+3} + 2 \iff v^2 + 3v - 108 = 0, v = 9$. Скорость на обратном пути $9 + 3 = 12$ км/ч.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(32)$.



Ответ: 8

Решение. График проходит через точку $(8;\ 4)$: $k\sqrt{8} = 4, k = \sqrt{2}$. Тогда $f(32) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{64} = 8$.

12 Найдите точку максимума функции y = $(x - 7)^3 - 192(x - 7) + 118$.

Ответ: -1

Решение. Производная $y' = 3((x - 7)^2 - 64)$. Она равна нулю при x = -1 и x = 15. Знаки производной на трёх промежутках: +, −, +. Поэтому точка максимума x = -1, точка минимума x = 15. Ответ: -1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ \pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$**; б)** $-\frac{11\pi}{6};\ -\frac{5\pi}{6};\ \frac{\pi}{6}$

Решение. а) По формулам $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$ и $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x$ уравнение принимает вид

$$\cos x+\sqrt{3}\sin x-2\cos x=0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{3}\sin x=\cos x.$$

Значения x, при которых $\cos x=0$, корнями не являются (тогда и $\sin x=0$, что невозможно). Делим на $\cos x$: $\operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни: $-\frac{5}{2}\leqslant\frac{1}{6}+k\leqslant 1\ \Leftrightarrow\ -\frac{8}{3}\leqslant k\leqslant\frac{5}{6}\ \Leftrightarrow\ k\in\{-2;\,-1;\,0\}$.

Получаем $x=-\frac{11\pi}{6};\ -\frac{5\pi}{6};\ \frac{\pi}{6}$.

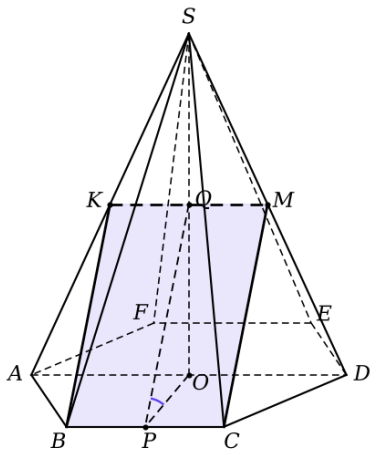
14 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M — середина SD, точка K — середина SA.

а) Докажите, что прямые BK и CM лежат в одной плоскости α.

б) Найдите высоту пирамиды, если угол между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды равен 60° и $AB=6$.

Ответ: б) 18

Решение.



а) Отрезок KM — средняя линия треугольника SAD, поэтому $KM\parallel AD$. В правильном шестиугольнике $AD\parallel BC$, значит, $KM\parallel BC$. Через две параллельные прямые BC и KM проходит плоскость α; прямые BK и CM соединяют точки этих прямых, поэтому лежат в плоскости α.

б) Пусть O — центр основания, $SO=h$ — высота пирамиды, P — середина BC. Отрезок KM — средняя линия треугольника SAD, а SO — его медиана, поэтому KM проходит через середину Q отрезка SO; значит, $Q\in\alpha$ и $QO=\frac{h}{2}$.

В правильном шестиугольнике $OP \perp BC$ и $OP = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB = 3\sqrt{3}$. Отрезок OP — проекция наклонной QP на плоскость основания, поэтому по теореме о трёх перпендикулярах $QP \perp BC$. Плоскость α пересекает основание по прямой BC, следовательно, $\angle QPO$ — линейный угол двугранного угла между α и основанием, $\angle QPO = 60^\circ$.

Из прямоугольного треугольника QOP: $\operatorname{tg} 60^\circ = \dfrac{QO}{OP} = \dfrac{h/2}{3\sqrt{3}}$, то есть $\sqrt{3} = \dfrac{h}{6\sqrt{3}}$, откуда $h = 18$.

15 Решите неравенство $5^{\log_5(9-x^2)} + x^4 - 29 \geqslant 0$.

Ответ: $(-3;\ -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5};\ 3)$

Решение. Выражение $5^{\log_5(9-x^2)}$ определено при $9 - x^2 > 0$, то есть при $-3 < x < 3$, и на этом промежутке равно $9 - x^2$. Неравенство принимает вид

$$9 - x^2 + x^4 - 29 \geqslant 0 \iff x^4 - x^2 - 20 \geqslant 0 \iff (x^2 - 5)(x^2 + 4) \geqslant 0 \iff x^2 \geqslant 5.$$

Отсюда $x \leqslant -\sqrt{5}$ или $x \geqslant \sqrt{5}$. С учётом условия $-3 < x < 3$ получаем $-3 < x \leqslant -\sqrt{5}$ или $\sqrt{5} \leqslant x < 3$.

16 В июле 2027 года планируется взять кредит в банке на четыре года. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.
Сколько рублей планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 4 500 000 рублей?

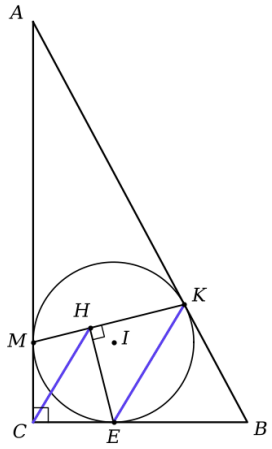
Ответ: 3000000

Решение. Пусть в кредит взято S рублей. Долг ежегодно уменьшается на $\dfrac{S}{4}$, поэтому долги на июль равны $S,\ \dfrac{3}{4}S,\ \dfrac{1}{2}S,\ \dfrac{1}{4}S,\ 0$. Проценты за четыре года: $0{,}2\left(S + \dfrac{3}{4}S + \dfrac{1}{2}S + \dfrac{1}{4}S\right) = 0{,}5S$. Общая сумма выплат $S + 0{,}5S = 1{,}5S = 4\,500\,000$, откуда $S = 3\,000\,000$ рублей.

17 В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся катетов AC, BC и гипотенузы AB в точках M, E и K соответственно. EH — перпендикуляр из точки E на прямую MK.
а) Докажите, что $EK \parallel CH$.
б) Известно, что $AC = 15$, $BC = 8$. Найдите отношение $CH : EK$.

Ответ: б) $4:5$

Решение.



а) Пусть I — центр вписанной окружности, r — её радиус. Четырёхугольник $CMIE$ — квадрат, поэтому $CM=CE$ и $\angle CEM=\angle CME=45^\circ$.

Угол EKM вписан в окружность с центром I и опирается на дугу EM, центральный угол которой $EIM=90^\circ$, поэтому $\angle EKM=45^\circ$. Аналогично $\angle EMK=\dfrac{1}{2}\angle EIK=\dfrac{1}{2}\left(180^\circ-\angle B\right)<90^\circ$. Оба угла треугольника EMK при стороне MK острые, поэтому основание H перпендикуляра из E лежит на отрезке MK.

Углы ECM и EHM прямые, поэтому точки C и H лежат на окружности с диаметром EM. Прямая EM отделяет вершину C от гипотенузы AB, поэтому точка H отрезка MK и точка C лежат по разные стороны от EM. Значит, вписанные углы CHM и CEM опираются на одну дугу CM, и $\angle CHM=\angle CEM=45^\circ$.

Точки C и E лежат по одну сторону от прямой MK: отрезок CE лежит на стороне BC, которую прямая MK не пересекает. Углы CHM и EKM равны и являются соответственными при прямых CH, EK и секущей MK. Следовательно, $EK\parallel CH$.

б) $AB=\sqrt{15^2+8^2}=17$, $r=\dfrac{15+8-17}{2}=3$. Пусть $\angle BAC=\alpha$; тогда $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{8}{15}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{8/17}{1+15/17}=\dfrac{1}{4}$.

Треугольник AMK равнобедренный ($AM=AK$), поэтому $\angle AMK=90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}$ и $\angle CMK=90^\circ+\dfrac{\alpha}{2}$.

В окружности с диаметром $EM=3\sqrt{2}$ хорда CH равна $EM\cdot\sin\angle CMH=3\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

Во вписанной окружности хорда $EK=2r\sin\angle EMK$, где $\angle EMK=\angle CMK-\angle CME=45^\circ+\dfrac{\alpha}{2}$. Значит, $EK=6\sin\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)=3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Тогда

$$\frac{CH}{EK}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}.$$

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(x+1)a^2+\left(x^3+x+2\right)a-x^4+x^3+2x^2=0$$

имеет ровно 2 решения.

Ответ: $a=-1;\ a>0$

Решение. Левая часть — квадратный трёхчлен относительно a (при $x\ /\ -1$). Так как $(x+1)\left(x^2-x+2\right)=x^3+x+2$ и $-x^4+x^3+2x^2=-x^2(x+1)(x-2)$, уравнение можно записать в виде

$$(x+1)\left(a^2+\left(x^2-x+2\right)a-x^2(x-2)\right)=0.$$

По теореме Виета корни квадратного трёхчлена по a равны $a=-x^2$ и $a=x-2$, поэтому

$$(x+1)\left(a+x^2\right)(a-x+2)=0.$$

Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}x=-1,\\x=a+2,\\x^2=-a.\end{array}\right.$$

При $a>0$ уравнение $x^2=-a$ корней не имеет; корни -1 и $a+2>2$ различны — ровно два решения.

При $a\leqslant 0$ кандидаты в корни: -1, $a+2$, $\sqrt{-a}$, $-\sqrt{-a}$. Ровно два различных корня возможны лишь при совпадениях. Переберём все пары:

— $\sqrt{-a}\ /\ -1$ при любом a;

— $\sqrt{-a}=-\sqrt{-a}$ только при $a=0$: корни -1, 2, 0 — три решения;

— $-\sqrt{-a}=-1\iff a=-1$: тогда $a+2=1=\sqrt{-a}$, различных корней два: -1 и 1;

— $a+2=-1\iff a=-3$: корни -1, $\pm\sqrt{3}$ — три решения;

— $a+2=\pm\sqrt{-a}$: $(a+2)^2=-a\iff a^2+5a+4=0\iff a\in\{-1;\ -4\}$; при $a=-4$ корни -1, ± 2 — три решения.

При остальных $a<0$ все четыре корня различны.

Итак, ровно два решения уравнение имеет при $a=-1$ и при $a>0$.

19 На столе лежат красные и синие карты (есть хотя бы по одной карте каждого цвета). На каждой карте написано целое число, не меньшее -100. Числа на картах одного цвета различны (одно и то же число может быть написано на синей и на красной карте). Числа на всех синих картах делятся на 5, а на всех красных — на 8. Известно, что самое большое число на красной карте равно утроенному количеству синих карт, а самое большое число на синей карте равно количеству красных карт.

а) Может ли количество синих карт быть равным 16?

б) Может ли количество синих карт быть равным 40?

в) Какое наибольшее количество синих карт может быть на столе?

Ответ: а) да; б) нет; в) 24

Решение. Пусть синих карт s, красных k. Наибольшее число на красной карте равно $3s$, на синей — k.

а) Да. Пусть синих карт 16 с числами $-70,\ -65,\ \ldots,\ 0,\ 5$, а красных карт 5 с числами $16,\ 24,\ 32,\ 40,\ 48$. Наибольшее синее число 5 равно количеству красных карт, наибольшее красное $48 = 3 \cdot 16$. Все условия выполнены.

б) На синих картах s различных чисел, кратных 5 и не меньших -100, поэтому наибольшее из них не меньше $-100 + 5(s-1) = 5s - 105$, то есть $k \geqslant 5s - 105$. На красных картах k различных чисел, кратных 8 и не меньших -100, то есть не меньших -96, поэтому наибольшее из них не меньше $-96 + 8(k-1) = 8k - 104$, то есть $3s \geqslant 8k - 104$.

При $s = 40$ получаем $k \geqslant 95$ и $120 \geqslant 8k - 104 \geqslant 656$ — противоречие. Ответ: нет.

в) Из неравенств $k \geqslant 5s - 105$ и $8k \leqslant 3s + 104$ получаем $8(5s - 105) \leqslant 3s + 104$, то есть $37s \leqslant 944$, $s \leqslant 25$. Кроме того, число $3s$ написано на красной карте и делится на 8, поэтому s делится на 8. Значит, $s \leqslant 24$.

Пример для $s = 24$: на синих картах числа $-100,\ -95,\ \ldots,\ 10,\ 15$ (их 24), на 15 красных картах числа $-40,\ -32,\ \ldots,\ 64,\ 72$. Наибольшее синее число 15 равно количеству красных карт, наибольшее красное $72 = 3 \cdot 24$. Ответ: 24.