## Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

**1** В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $AD$ и $BC$ равны 20 и 14 соответственно, а боковая сторона равна 5. Найдите площадь трапеции.




**Ответ: 68**

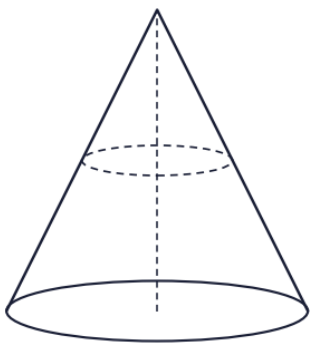
**Решение.** Проекция боковой стороны на большее основание равна $\dfrac{20-14}{2}=3$, высота $h=\sqrt{5^2-3^2}=4$, $S=\dfrac{20+14}{2}\cdot 4=68$.

**2** Даны векторы $\vec{a}\,(-3;\,1)$ и $\vec{b}\,(-5;\,5)$. Найдите длину вектора $\vec{a}+\vec{b}$.

**Ответ: 10**

**Решение.** $\vec{a}+\vec{b}=(-8;\,6)$, $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{64+36}=10$.

**3** Через середину высоты конуса параллельно основанию проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Объём меньшего конуса равен 7. Найдите объём исходного конуса.



**Ответ: 56**

**Решение.** Меньший конус подобен исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$, объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия: $V = 8 \cdot 7 = 56$.

**4** В среднем из 250 садовых насосов в продаже 8 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

**Ответ: 0,968**

**Решение.** $P = \frac{250 - 8}{250} = 0{,}968$.

**5** Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,4, второго — 0,8. Найдите вероятность того, что в мишень попадёт ровно один стрелок.

**Ответ: 0,56**

**Решение.** Ровно одно попадание: первый попал, второй нет, или наоборот. $P = 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

**6** Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} = 8$.

**Ответ: 2**

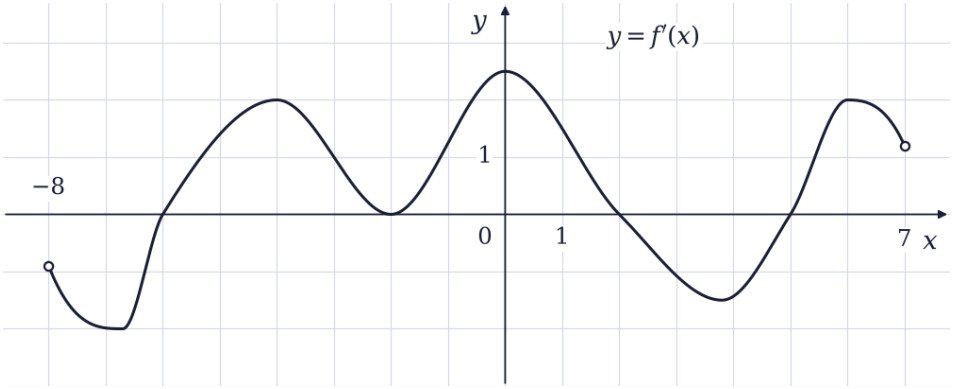
**Решение.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} = 2^{5-x}$, $8 = 2^3$. Тогда $5 - x = 3$, $x = 2$.

**7** Найдите значение выражения $(\sqrt{640} - \sqrt{250})(\sqrt{640} + \sqrt{250})$.

**Ответ: 390**

**Решение.** По формуле разности квадратов: $(\sqrt{640})^2 - (\sqrt{250})^2 = 640 - 250 = 390$.

**8** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8;\ 7)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на этом интервале.




**Ответ: 3**

**Решение.** Точки экстремума — нули производной, в которых она меняет знак: $-6;\ 2;\ 5$. В точке $-2$ график $f'$ касается оси абсцисс без смены знака, это не экстремум. Всего 3.

**9** Масса радиоактивного изотопа в образце уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где $m_0$ — начальная масса изотопа (в мг), $t$ — время, прошедшее от начального момента (в минутах), $T$ — период полураспада (в минутах). Начальная масса изотопа $m_0 = 640$ мг, период полураспада $T = 3$ мин. Через сколько минут масса изотопа станет равной 160 мг?

**Ответ: 6**

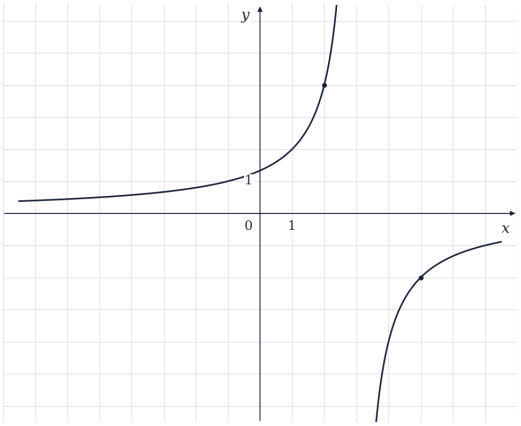
**Решение.** $640 \cdot 2^{-t/3} = 160 \iff 2^{-t/3} = 2^{-2} \iff t = 6$.

**10** Смешав 60-процентный и 80-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 40-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 70-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 65-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 60-процентного раствора использовали для получения смеси?

**Ответ: 16**

**Решение.** Пусть $x$ кг — масса 60-процентного раствора, $y$ кг — 80-процентного. Тогда $0{,}6x + 0{,}8y = 0{,}4(x + y + 10)$ и $0{,}6x + 0{,}8y + 7 = 0{,}65(x + y + 10)$. Вычитая, получим $x + y + 10 = 28$, откуда $x = 16$, $y = 2$.

**11** На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \dfrac{k}{x+a}$. Найдите значение $f(11)$.




**Ответ: -0,5**

**Решение.** По точкам $(2;\ 4)$ и $(5;\ -2)$: $k = 4 \cdot (2+a) = (-2) \cdot (5+a)$, откуда $a = -3$, $k = -4$. $f(11) = \dfrac{-4}{8} = -0{,}5$.

**12** Найдите точку минимума функции y = (x − 7)$^3$ − 192(x − 7) + 115.

**Ответ: 15**

**Решение.** Производная y′ = 3((x − 7)$^2$ − 64). Она равна нулю при x = -1 и x = 15. Знаки производной на трёх промежутках: +, −, +. Поэтому точка максимума x = -1, точка минимума x = 15. Ответ: 15.

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

**13** а) Решите уравнение $\cos 2x + 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -3$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

**Ответ: а)** $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$**; б)** $\dfrac{3\pi}{2}$

**Решение.** а) По формуле приведения $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, а $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

Уравнение принимает вид

$$\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 2\sin x = -3 \iff \sin^2 x - \sin x - 2 = 0.$$

Отсюда $\sin x = -1$ или $\sin x = 2$. Уравнение $\sin x = 2$ корней не имеет, так как $|2| > 1$.

Если $\sin x = -1$, то $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на $\pi$ получаем неравенства для $k$).

$\dfrac{\pi}{2} \leqslant -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant 2\pi \iff \dfrac{1}{2} \leqslant k \leqslant \dfrac{5}{4}, k \in \{1\}\colon x = \dfrac{3\pi}{2}.$

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{3\pi}{2}$.

**14** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 10, боковое ребро равно 11.

а) Докажите, что прямая $BD$ перпендикулярна плоскости $SAC$.

б) Найдите угол между прямой $SB$ и плоскостью $SAC$.

---

**Ответ: б)** $\arcsin\dfrac{5\sqrt{2}}{11}$

**Решение.** а) Пусть $O$ — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Диагонали квадрата перпендикулярны: $BD \perp AC$. Пирамида правильная, поэтому её высота — отрезок $SO$, и $SO \perp BD$. Прямая $BD$ перпендикулярна двум пересекающимся прямым $AC$ и $SO$ плоскости $SAC$, значит, $BD \perp (SAC)$.

б) По пункту а) $BO \perp (SAC)$, поэтому $SO$ — проекция прямой $SB$ на плоскость $SAC$, и искомый угол равен $\angle BSO$. В прямоугольном треугольнике $BSO$: $BO = \dfrac{10\sqrt{2}}{2}$, $SB = 11$, $\sin\angle BSO = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{5\sqrt{2}}{11}$.

Ответ: б) $\arcsin\dfrac{5\sqrt{2}}{11}$.

**15** Решите неравенство

$$\log_3^2 x + 2\log_3 x \geqslant 0.$$

---

**Ответ:** $\left(0;\ \dfrac{1}{9}\right] \cup [1;\ +\infty)$

**Решение.** ОДЗ: $x > 0$. Сделаем замену $t = \log_3 x$: $t^2 + 2t \geqslant 0 \iff (t+2)t \geqslant 0 \iff$ $t \leqslant -2$ или $t \geqslant 0$.

Функция $y = \log_3 x$ возрастает, поэтому $\log_3 x \leqslant -2 \iff 0 < x \leqslant \dfrac{1}{9}, \log_3 x \geqslant 0 \iff$ $x \geqslant 1$.

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{9}\right] \cup [1;\ +\infty)$.

**16** Вклад под 10 % годовых. В конце каждого из трёх лет после начисления процентов вкладчик снимает 1 млн руб. Найдите наименьший начальный вклад (целое число млн), при котором после третьего снятия на счёте останется не меньше 10 млн руб.

**Ответ: 10 млн руб.**

**Решение.** $A \cdot 1{,}331 - (1{,}21 + 1{,}1 + 1) \geq 10 \Rightarrow 1{,}331A \geq 13{,}31 \Rightarrow A \geq 10$.

**17** Из точки P к окружности радиуса 6 проведены касательные PA и PB, угол APB равен 60°, O — центр окружности.

а) Докажите, что OP — серединный перпендикуляр к AB.

б) Найдите площадь треугольника PAB.

**Ответ: б) 27√3**

**Решение.** Радиусы OA=OB, отрезки касательных PA=PB. Значит, O и P равноудалены от A и B, а прямая OP — серединный перпендикуляр AB. Она делит угол APB пополам. В прямоугольном OAP: ∠APO=30°, OA=6, поэтому PA=6√3. Треугольник PAB равнобедренный с углом между равными сторонами 60°, значит равносторонний. Площадь равна (6√3)²√3/4=27√3.

**18** Найдите все значения a, при которых уравнение |x−3|/(x−1)=a имеет ровно два корня на луче x>1.

**Ответ: a∈(0;1)**

**Решение.** На (1;3] левая часть равна (3−x)/(x−1)=2/(x−1)−1 и строго убывает от +∞ до 0. На [3;+∞) она равна (x−3)/(x−1)=1−2/(x−1) и строго возрастает от 0 до 1, не достигая 1. Первую ветвь пересекает любой уровень a≥0 (при a=0 это x=3), вторую — уровни 0≤a<1. Для a=0 обе ветви дают одну и ту же точку x=3. Поэтому два различных решения только при 0<a<1.

**19** Конечное множество натуральных чисел назовём уравновешенным, если его можно разделить на две части с одинаковой суммой.

а) Уравновешено ли множество {100,101,…,199}?

б) Уравновешено ли множество $\{2,4,8,\ldots,2^{2^{00}}\}$?

в) Сколько уравновешенных четырёхэлементных подмножеств есть у множества {3,4,5,6,8,10,12}?

**Ответ: а) да; б) нет; в) 8**

**Решение.** а) Разбиваем 100 чисел на 50 пар (100,199),(101,198),…,(149,150); сумма каждой пары 299. По 25 пар в каждую часть дают одинаковую сумму.

б) Самое большое число $2^{2^{00}}$ превосходит сумму всех остальных: $2+4+\ldots+2^{199}=2^{2^{00}}-2$. Часть, содержащая самое большое число, не может иметь равную сумму с другой.

в) У четырёх элементов равные суммы возможны либо при равенстве одного числа сумме трёх, либо при равенстве двух пар. Проверка конечного набора даёт восемь и только восемь четвёрок: {3,4,5,6} (3+6=4+5), {3,4,5,12} (12=3+4+5), {3,5,6,8} (3+8=5+6), {3,5,8,10} (3+10=5+8), {3,5,10,12} (3+12=5+10), {4,6,8,10} (4+10=6+8), {4,6,10,12} (4+12=6+10), {6,8,10,12} (6+12=8+10).