Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 27 и 11 соответственно, а боковая сторона равна 10. Найдите площадь трапеции.



Ответ: 114

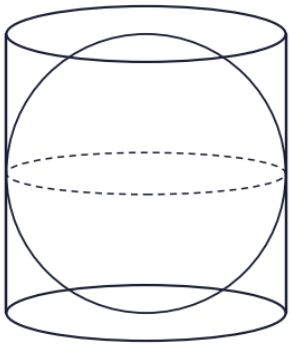
Решение. Проекция боковой стороны на большее основание равна $\dfrac{27-11}{2}=8$, высота $h=\sqrt{10^2-8^2}=6$, $S=\dfrac{27+11}{2}\cdot 6=114$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(1;\ 4)$ и $\vec{b}\,(6;\ -2)$. Найдите длину вектора $2\vec{a}+\vec{b}$.

Ответ: 10

Решение. $2\vec{a}+\vec{b}=(8;\ 6)$, $|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{64+36}=10$.

3 В цилиндр вписан шар: шар касается обоих оснований цилиндра и его боковой поверхности. Площадь полной поверхности цилиндра равна 87. Найдите площадь поверхности шара.



Ответ: 58

Решение. Высота цилиндра равна диаметру шара: $h = 2r$. $S_{\text{цил}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2 = 87$, откуда $\pi r^2 = 14{,}5$; $S_{\text{шара}} = 4\pi r^2 = 58$.

4 В коробке лежат 50 одинаковых на вид чайных пакетиков: 4 пакетика с зелёным чаем, 8 — с белым, остальные — с чёрным. Найдите вероятность того, что случайно выбранный пакетик окажется с чёрным чаем.

Ответ: 0,76

Решение. Пакетиков с чёрным чаем $50 - 4 - 8 = 38$; $P = \dfrac{38}{50} = 0{,}76$.

5 Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,8, второго — 0,4. Найдите вероятность того, что в мишень попадёт ровно один стрелок.

Ответ: 0,56

Решение. Ровно одно попадание: первый попал, второй нет, или наоборот. $P = 0{,}8 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}56$.

6 Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-3} = 9$.

Ответ: 1

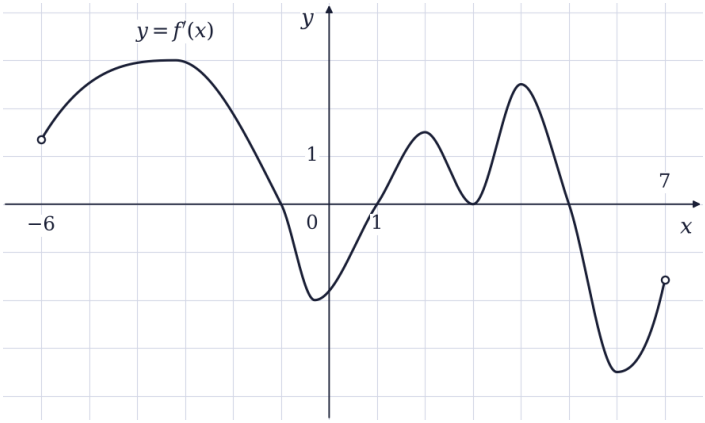
Решение. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-3} = 3^{3-x}$, $9 = 3^2$. Тогда $3 - x = 2$, $x = 1$.

7 Найдите значение выражения $\log_{0,2} 3 - \log_{0,2} 15$.

Ответ: 1

Решение. $\log_{0,2} 3 - \log_{0,2} 15 = \log_{0,2} \dfrac{3}{15} = \log_{0,2} 0{,}2 = 1$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6;\ 7)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 2

Решение. В точке максимума производная меняет знак с «+» на «−». Таких точек 2: $-1;\ 5$.

9 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 20t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 15 метров?

Ответ: 2

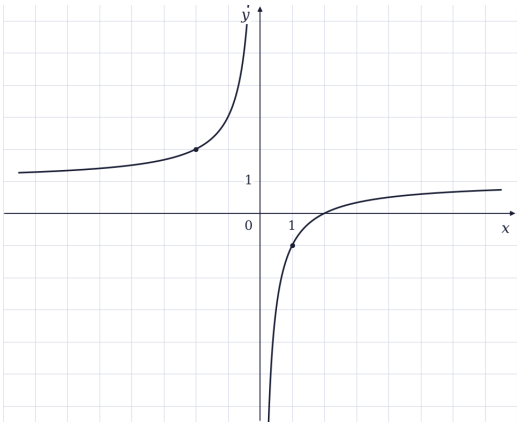
Решение. $h(t) \geqslant 15 \iff 5t^2 - 20t + 15 \leqslant 0 \iff 1 \leqslant t \leqslant 3$. Мяч находится не ниже 15 м в течение $3 - 1 = 2$ с.

10 Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 140 литров она заполняет на 3 минуты дольше, чем вторая труба?

Ответ: 14

Решение. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{140}{x} - \dfrac{140}{x+6} = 3$, положительный корень $x = 14$.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{k}{x+a}+b$, где числа a, b и k — целые. Найдите значение $f(20)$.



Ответ: 0,9

Решение. Асимптоты графика: $x=0$ и $y=1$, поэтому $a=0$, $b=1$. По точке $(-2;\ 2)$: $2=\dfrac{k}{-2}+1$, откуда $k=-2$. $f(20)=\dfrac{-2}{20}+1=0{,}9$.

12 Найдите наибольшее значение функции y = (x − 6)^3 − 147(x − 6) + 112 на отрезке [-8; 13].

Ответ: 798

Решение. Производная y′ = 3((x − 6)^2 − 49); критические точки x = -1, x = 13. На концах отрезка y(-8) = -574, y(13) = -574. Во внутренней критической точке y(-1) = 798. Наибольшее значение: 798.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x+\sin(x-\pi)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; **б)** $\dfrac{3\pi}{2}$; $\dfrac{13\pi}{6}$

Решение. а) По формуле приведения $\sin(x-\pi)=-\sin x$, а $\cos 2x=1-2\sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$\left(1-2\sin^2 x\right)-\sin x=0\ \Longleftrightarrow\ 2\sin^2 x+\sin x-1=0.$$

Отсюда $\sin x = \dfrac{1}{2}$ или $\sin x = -1$.

Если $\sin x = \dfrac{1}{2}$, то $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, или $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Если $\sin x = -1$, то $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$\pi \leqslant \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant \dfrac{5\pi}{2} \iff \dfrac{5}{12} \leqslant k \leqslant \dfrac{7}{6}, k \in \{1\}$: $x = \dfrac{13\pi}{6}$.

$\pi \leqslant \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant \dfrac{5\pi}{2} \iff \dfrac{1}{12} \leqslant n \leqslant \dfrac{5}{6}$: целых решений нет.

$\pi \leqslant -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m \leqslant \dfrac{5\pi}{2} \iff \dfrac{3}{4} \leqslant m \leqslant \dfrac{3}{2}, m \in \{1\}$: $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{3\pi}{2}$; $\dfrac{13\pi}{6}$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 8, а боковое ребро равно 3. Точка M — середина ребра AB.

а) Докажите, что прямая CM перпендикулярна плоскости ABB_1.

б) Найдите угол между прямой A_1C и плоскостью ABB_1.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \dfrac{4\sqrt{3}}{5}$

Решение. а) Треугольник ABC равносторонний, его медиана CM является высотой: $CM \perp AB$. Призма правильная, поэтому боковое ребро AA_1 перпендикулярно плоскости основания, и $AA_1 \perp CM$. Прямая CM перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB и AA_1 плоскости ABB_1, значит, $CM \perp (ABB_1)$.

б) По пункту а) M — проекция точки C на плоскость ABB_1, поэтому A_1M — проекция прямой A_1C, и искомый угол равен $\angle CA_1M$. $CM = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, $A_1M = \sqrt{AA_1^2 + AM^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. В прямоугольном треугольнике CA_1M: $\operatorname{tg} \angle CA_1M = \dfrac{CM}{A_1M} = \dfrac{4\sqrt{3}}{5}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \dfrac{4\sqrt{3}}{5}$.

15 Решите неравенство

$$\log_3^2 x - \log_3 x - 6 \geqslant 0.$$

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{9}\right] \cup [27;\ +\infty)$

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Сделаем замену $t = \log_3 x$: $t^2 - t - 6 \geqslant 0 \iff (t+2)(t-3) \geqslant 0 \iff t \leqslant -2$ или $t \geqslant 3$.

Функция $y = \log_3 x$ возрастает, поэтому $\log_3 x \leqslant -2 \iff 0 < x \leqslant \dfrac{1}{9}$, $\log_3 x \geqslant 3 \iff$

$x \geqslant 27$.

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{9}\right] \cup [27;\ +\infty)$.

16 Кредит 1 млн руб. на 5 лет (стандартная схема, долг уменьшается равномерно), r — целое. Найдите наименьшее r, при котором общая сумма выплат больше 1,5 млн руб. Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 17 %

Решение. $\Sigma = 1 + \frac{r}{100} \cdot 1 \cdot \frac{6}{2} = 1 + 0{,}03r > 1{,}5 \Rightarrow r > 16{,}7$, наименьшее целое $r = 17$.

17 Остроугольный треугольник ABC имеет стороны AB=13, AC=15, BC=14. Точки D∈AC и E∈AB — основания высот из B и C соответственно.
а) Докажите, что B,C,D,E лежат на одной окружности.
б) Найдите DE.

Ответ: б) 462/65

Решение. Углы BDC и BEC прямые, поэтому D и E лежат на окружности с диаметром BC. По теореме косинусов cos A=(13²+15²−14²)/(2·13·15)=33/65. В прямоугольных ABD и ACE имеем AD=AB cos A, AE=AC cos A. Треугольники ADE и ABC подобны с коэффициентом cos A, поэтому DE=BC cos A=14·33/65=462/65.

18 Найдите все значения a, при которых уравнение $2^x+2^{-x}=a$ имеет ровно два корня на отрезке $[-1;1]$.

Ответ: a∈(2;5/2]

Решение. Функция 2^x+2^{-x} чётная и строго возрастает на [0;1]: если $t=2^x \geq 1$, то $t+1/t$ растёт при $t>1$. Её минимум на отрезке равен 2 при x=0, максимум равен 5/2 при x=±1. При $2<a\leq 5/2$ есть ровно два симметричных корня; при a=2 один корень, при остальных a корней нет.

19 Трёхзначное натуральное число, не оканчивающееся на 00, делят на сумму его цифр.

а) Может ли частное равняться 90?

б) Может ли частное равняться 88?

в) Каково наибольшее натуральное значение этого частного?

Ответ: а) да; б) нет; в) 91

Решение. Пусть число равно $100a+10b+c$, сумма цифр $a+b+c$, где $1\le a\le 9$, $0\le b,c\le 9$ и $b+c\ge 1$.

а) $810/(8+1+0)=90$.

б) Равенство $100a+10b+c=88(a+b+c)$ даёт $12a=78b+87c$, или $4a=26b+29c$. Левая часть не больше 36. Если $b\ge 2$ или $c\ge 2$, правая часть больше 36. Остаются $(b,c)=(1,0),(0,1),(1,1)$, но 26,29,55 не делятся на 4 или превышают 36. Равенство невозможно.

в) Из $b+c\ge 1$ следует $81b+90c\ge 81\ge 9a$. Поэтому $100a+10b+c\le 91(a+b+c)$. Граница достигается на числе 910: $910/(9+1+0)=91$.