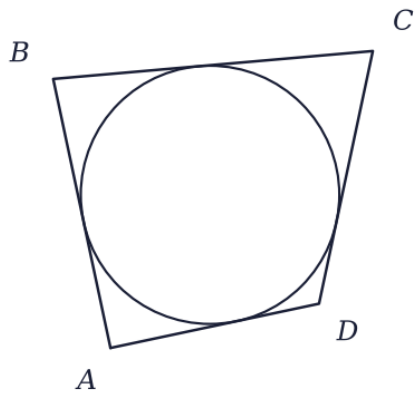
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 54, вписана окружность, $AB = 18$, $BC = 6$. Найдите CD.



Ответ: 9

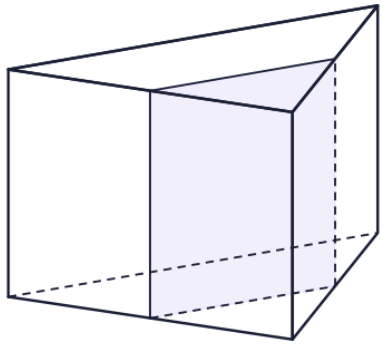
Решение. В описанном четырёхугольнике $AB + CD = BC + AD = \dfrac{P}{2} = 27$, поэтому $CD = 27 - 18 = 9$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(5;\ -5)$ и $\vec{b}\,(5;\ -6)$. Найдите длину вектора $3\vec{a} + \vec{b}$.

Ответ: 29

Решение. $3\vec{a} + \vec{b} = (20;\ -21)$, $|3\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{400 + 441} = 29$.

3 Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объём отсечённой треугольной призмы равен 64. Найдите объём исходной призмы.



Ответ: 256

Решение. Основание отсечённой призмы — треугольник, подобный основанию исходной с коэффициентом $\dfrac{1}{2}$, его площадь в 4 раза меньше. Высоты призм равны, поэтому объём исходной призмы в 4 раза больше: $4 \cdot 64 = 256$.

4 В среднем из 250 фонариков, поступивших в продажу, 3 неисправны. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля прибор исправен.

Ответ: 0,988

Решение. $P = \dfrac{250 - 3}{250} = 0{,}988$.

5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

Ответ: 0,0064

Решение. Выстрелы независимы: $P = 0{,}8 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0064$.

6 Найдите корень уравнения $\log_2(11 - x) = 3$.

Ответ: 3

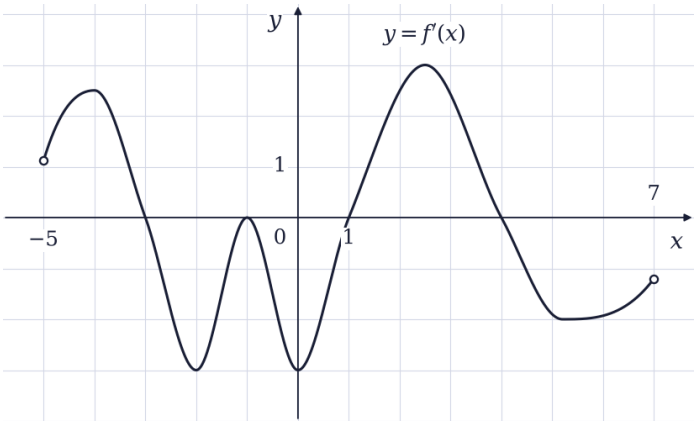
Решение. По определению логарифма $11 - x = 2^3 = 8$, откуда $x = 3$. Аргумент логарифма положителен.

7 Найдите значение выражения $12 \operatorname{tg} 53^\circ \cdot \operatorname{tg} 143^\circ$.

Ответ: -12

Решение. $\operatorname{tg} 143^\circ = -\operatorname{ctg} 53^\circ$, а $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, поэтому выражение равно -12.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 7)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 1

Решение. В точке минимума производная меняет знак с «−» на «+». Такая точка одна: $x = 1$.

9 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 8 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 2 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 32$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}2$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 38,4 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: 8

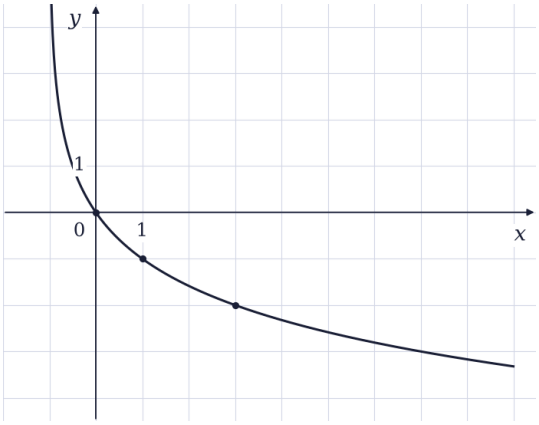
Решение. $RC = 2 \cdot 10^6 \cdot 8 \cdot 10^{-6} = 16$. $38{,}4 = 1{,}2 \cdot 16 \cdot \log_2 \dfrac{32}{U}$, откуда $\log_2 \dfrac{32}{U} = 2$, $U = \dfrac{32}{4} = 8$.

10 Смешав 45-процентный и 70-процентный растворы кислоты и добавив 5 кг чистой воды, получили 50-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 5 кг воды добавили 5 кг 90-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 68-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 45-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: 6

Решение. Пусть x кг — масса 45-процентного раствора, y кг — 70-процентного. Тогда $0{,}45x + 0{,}7y = 0{,}5(x + y + 5)$ и $0{,}45x + 0{,}7y + 4{,}5 = 0{,}68(x + y + 5)$. Вычитая, получим $x + y + 5 = 25$, откуда $x = 6$, $y = 14$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = -\log_a(x + b)$. Найдите $f(63)$.



Ответ: -6

Решение. $\log_a(x + b) = 0$ при $x + b = 1$; график пересекает ось абсцисс в точке $x = 0$, поэтому $b = 1$. По точке $(3;\ -2)$ находим $a = 2$. $f(63) = -\log_2 64 = -6$.

12 Найдите точку максимума функции y = 7ln x − x + 109.

Ответ: 7

Решение. Область определения: x > 0. Производная y′ = 7/x − 1. Она положительна при 0 < x < 7 и отрицательна при x > 7. Точка максимума x = 7.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x + 2\cos(\pi + x) = -1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; **б)** 2π; $\dfrac{5\pi}{2}$; $\dfrac{7\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos(\pi + x) = -\cos x$, а $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Уравнение принимает вид

$$\left(2\cos^2 x - 1\right) - 2\cos x = -1 \iff \cos^2 x - \cos x = 0.$$

Отсюда $\cos x = 1$ или $\cos x = 0$.
Если $\cos x = 1$, то $x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Если $\cos x = 0$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.
б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).
$2\pi \leqslant 2\pi k \leqslant \dfrac{7\pi}{2} \iff 1 \leqslant k \leqslant \dfrac{7}{4}, k \in \{1\}$: $x = 2\pi$.
$2\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \pi n \leqslant \dfrac{7\pi}{2} \iff \dfrac{3}{2} \leqslant n \leqslant 3, n \in \{2, 3\}$: $x = \dfrac{5\pi}{2}, x = \dfrac{7\pi}{2}$.
Ответ: а) $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) 2π; $\dfrac{5\pi}{2}$; $\dfrac{7\pi}{2}$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 6, боковое ребро равно 14.
а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости SAC.
б) Найдите угол между прямой SB и плоскостью SAC.

Ответ: б) $\arcsin \dfrac{3\sqrt{2}}{14}$

Решение. а) Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Диагонали квадрата перпендикулярны: $BD \perp AC$. Пирамида правильная, поэтому её высота — отрезок SO, и $SO \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и SO плоскости SAC, значит, $BD \perp (SAC)$.
б) По пункту а) $BO \perp (SAC)$, поэтому SO — проекция прямой SB на плоскость SAC, и искомый угол равен $\angle BSO$. В прямоугольном треугольнике BSO: $BO = \dfrac{6\sqrt{2}}{2}$, $SB = 14$, $\sin \angle BSO = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{3\sqrt{2}}{14}$.
Ответ: б) $\arcsin \dfrac{3\sqrt{2}}{14}$.

15 Решите неравенство

$$\frac{9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27}{\log_2(x+2)} \geqslant 0.$$

Ответ: $(-1;\ 1] \cup [2;\ +\infty)$

Решение. Область допустимых значений: $x + 2 > 0$ и $\log_2(x+2) \neq 0$, то~есть $x > -2$, $x \neq -1$.
$4 \cdot 3^{x+1} = 12 \cdot 3^x$, числитель раскладывается на множители: $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = (3^x - 3)(3^x - 9)$.
Функции $y = 3^t$ и $y = \log_2 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак $3^x - 3$ совпадает со знаком $x -$

1, знак 3^x-9 — со знаком $x-2$, знак $\log_2(x+2)=\log_2(x+2)-\log_2 1$ — со знаком $x+1$. Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x+1}\geqslant 0,\quad x>-2.$$

Метод интервалов: на $(-2;\,-1)$ дробь отрицательна; на $(-1;\,1)$ дробь положительна; на $(1;\,2)$ дробь отрицательна; на $(2;\,+\infty)$ дробь положительна; в точках $x=1$, $x=2$ числитель равен нулю.
Ответ: $(-1;\,1]\cup[2;\,+\infty)$.

16 Кредит 3 млн руб. под 10 % (стандартная схема) гасится равными ежегодными платежами, каждый не больше 1 млн руб. Срок — целое число лет. Найдите наименьший срок.
Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 4 года

Решение. $X=\dfrac{3q^n(q-1)}{q^n-1}$: $n=3\Rightarrow X\approx 1{,}206>1$; $n=4\Rightarrow X\approx 0{,}946\leq 1$.

17 В треугольнике ABC углы B и C равны 70° и 50°. Биссектриса AI пересекает описанную окружность повторно в M; I — центр вписанной окружности. Радиус описанной окружности равен 10.
а) Докажите MB=MC=MI.
б) Найдите MI.

Ответ: б) 10

Решение. Так как AM — биссектриса, дуги BM и MC равны, значит MB=MC. Для MI=MB сравним углы в BIM: ∠BIM=90°−C/2, а ∠IBM=B/2+∠CBM=B/2+A/2=90°−C/2. Следовательно, треугольник BIM равнобедренный, MI=MB. Угол A=60°, ∠BAM=30°. Хорда BM=2R sin30°=10, откуда MI=10.

18 Найдите все значения a, при которых уравнение |x−2|=a x² имеет ровно три различных действительных корня.

Ответ: a=1/8

Решение. Если a<0, корней нет; при a=0 единственный корень x=2. Пусть a>0. На луче x≤2 уравнение 2−x=a x² имеет два корня: один отрицательный, другой между 0 и 2 (значения 2−x−a x² при 0 и 2 имеют разные знаки). На луче x≥2 получаем a x²−x+2=0. При 0<a<1/8 дискриминант 1−8a положителен и оба корня не меньше 2, что даёт в сумме четыре корня. При a=1/8 корни на этом луче совпадают в точке x=4, а общее число различных корней равно трём. При a>1/8 новых корней нет.

19 Дробь называют суммой единичных дробей, если каждый числитель равен 1, а знаменатели — разные натуральные числа.

а) Представьте 33/100 такой суммой.

б) Представьте 15/91 такой суммой.

в) Найдите все пары натуральных $m \le n$, для которых $1/m+1/n=1/14$.

Ответ: а) 1/5+1/10+1/50+1/100; б) 1/7+1/91+1/182+1/273+1/546; в) (15,210), (16,112), (18,63), (21,42), (28,28)

Решение. а) Приводим к знаменателю 100: (20+10+2+1)/100=33/100.

б) 1/7+1/91=14/91; 1/182+1/273+1/546=(3+2+1)/546=1/91, поэтому всего 15/91. Все знаменатели различны.

в) Из $14(m+n)=mn$ получаем $(m-14)(n-14)=196$. Поскольку дроби положительны и их сумма равна 1/14, обязательно $m,n>14$. Пусть $d=m-14 \le n-14=196/d$. Положительные делители 196, не превышающие 14: 1,2,4,7,14. Они дают все указанные пять пар.