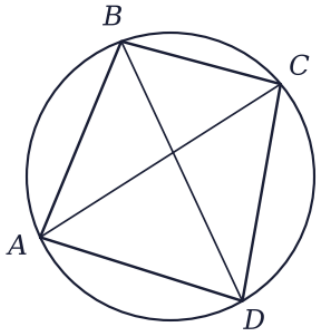
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 30°, угол CAD равен 58°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 88

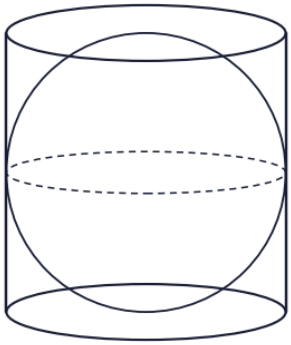
Решение. Вписанные углы CBD и CAD опираются на одну дугу CD, поэтому $\angle CBD = \angle CAD = 58^\circ$. Тогда $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 30^\circ + 58^\circ = 88^\circ$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(4;\ 3)$ и $\vec{b}\,(1;\ -3)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: -5

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) = -5$.

3 В цилиндр вписан шар: шар касается обоих оснований цилиндра и его боковой поверхности. Объём цилиндра равен 99. Найдите объём шара.



Ответ: 66

Решение. Высота цилиндра равна диаметру шара: $V_{\text{цил}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 99$, откуда $\pi r^3 = 49{,}5$; $V_{\text{шара}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 66$.

4 В коробке лежат 24 одинаковых на вид чайных пакетиков: 10 пакетиков с зелёным чаем, 8 — с белым, остальные — с чёрным. Найдите вероятность того, что случайно выбранный пакетик окажется с чёрным чаем.

Ответ: 0,25

Решение. Пакетиков с чёрным чаем $24 - 10 - 8 = 6$; $P = \dfrac{6}{24} = 0{,}25$.

5 Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,3, второго — 0,2. Найдите вероятность того, что в мишень попадёт ровно один стрелок.

Ответ: 0,38

Решение. Ровно одно попадание: первый попал, второй нет, или наоборот. $P = 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}38$.

6 Найдите корень уравнения $\log_3(2x + 9) = \log_3(x - 5) + 1$.

Ответ: 24

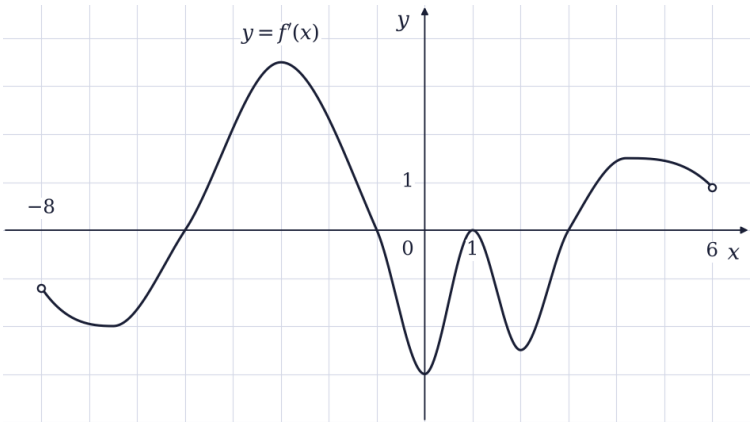
Решение. $1 = \log_3 3$, поэтому $2x + 9 = 3(x - 5)$, откуда $x = 24$; при этом значении оба аргумента логарифмов положительны.

7 Найдите значение выражения $(\sqrt{192} - \sqrt{48})(\sqrt{192} + \sqrt{48})$.

Ответ: 144

Решение. По формуле разности квадратов: $(\sqrt{192})^2 - (\sqrt{48})^2 = 192 - 48 = 144$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8;\ 6)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 3

Решение. Точки экстремума — нули производной, в которых она меняет знак: $-5;\ -1;\ 3$. В точке 1 график f' касается оси абсцисс без смены знака, это не экстремум. Всего 3.

9 Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 25$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 5$ м/с². За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 52,5 метров. Ответ дайте в секундах.

Ответ: 3

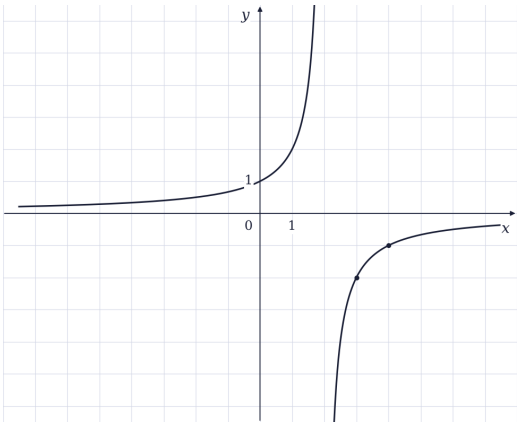
Решение. $25t - \dfrac{5t^2}{2} = 52{,}5 \iff t^2 - 10t + 21 = 0$. Корни: $t = 3$ и $t = 7$. Торможение длится $\dfrac{v_0}{a} = 5$ с, поэтому подходит $t = 3$.

10 Смешав 5-процентный и 80-процентный растворы кислоты и добавив 5 кг чистой воды, получили 52-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 5 кг воды добавили 5 кг 90-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 70-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 5-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: 4

Решение. Пусть x кг — масса 5-процентного раствора, y кг — 80-процентного. Тогда $0{,}05x + 0{,}8y = 0{,}52(x + y + 5)$ и $0{,}05x + 0{,}8y + 4{,}5 = 0{,}7(x + y + 5)$. Вычитая, получим $x + y + 5 = 25$, откуда $x = 4$, $y = 16$.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{k}{x+a}$. Найдите значение $f(-8)$.



Ответ: 0,2

Решение. По точкам $(3;\ -2)$ и $(4;\ -1)$: $k=(-2)\cdot(3+a)=(-1)\cdot(4+a)$, откуда $a=-2$, $k=-2$. $f(-8)=\dfrac{-2}{-10}=0{,}2$.

12 Найдите точку максимума функции $y = x^2e^{7-x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

Ответ: 2

Решение. Производная $y' = e^{7-x}x(2-x)$. При $0 < x < 2$ она положительна, при $x > 2$ отрицательна. Значит, точка максимума $x = 2$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x+\sin(x-\pi)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; **б)** $\dfrac{17\pi}{6}$; $\dfrac{7\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\sin(x-\pi)=-\sin x$, а $\cos 2x=1-2\sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$\left(1-2\sin^2 x\right)-\sin x=0\ \Longleftrightarrow\ 2\sin^2 x+\sin x-1=0.$$

Отсюда $\sin x = \dfrac{1}{2}$ или $\sin x = -1$.

Если $\sin x = \dfrac{1}{2}$, то $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, или $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Если $\sin x = -1$, то $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$\dfrac{5\pi}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant 4\pi \iff \dfrac{7}{6} \leqslant k \leqslant \dfrac{23}{12}$: целых решений нет.

$\dfrac{5\pi}{2} \leqslant \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant 4\pi \iff \dfrac{5}{6} \leqslant n \leqslant \dfrac{19}{12}, n \in \{1\}$: $x = \dfrac{17\pi}{6}$.

$\dfrac{5\pi}{2} \leqslant -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m \leqslant 4\pi \iff \dfrac{3}{2} \leqslant m \leqslant \dfrac{9}{4}, m \in \{2\}$: $x = \dfrac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{17\pi}{6}$; $\dfrac{7\pi}{2}$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 2. Точка M — середина ребра AB.

а) Докажите, что прямая CM перпендикулярна плоскости ABB_1.

б) Найдите угол между прямой A_1C и плоскостью ABB_1.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

Решение. а) Треугольник ABC равносторонний, его медиана CM является высотой: $CM \perp AB$. Призма правильная, поэтому боковое ребро AA_1 перпендикулярно плоскости основания, и $AA_1 \perp CM$. Прямая CM перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB и AA_1 плоскости ABB_1, значит, $CM \perp (ABB_1)$.

б) По пункту а) M — проекция точки C на плоскость ABB_1, поэтому A_1M — проекция прямой A_1C, и искомый угол равен $\angle CA_1M$. $CM = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $A_1M = \sqrt{AA_1^2 + AM^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. В прямоугольном треугольнике CA_1M: $\operatorname{tg} \angle CA_1M = \dfrac{CM}{A_1M} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

15 Решите неравенство

$$\log_3^2 x - 3\log_3 x \leqslant 0.$$

Ответ: $[1;\ 27]$

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Сделаем замену $t = \log_3 x$: $t^2 - 3t \leqslant 0 \iff t(t-3) \leqslant 0 \iff 0 \leqslant t \leqslant 3$.

Функция $y = \log_3 x$ возрастает, поэтому $0 \leqslant \log_3 x \leqslant 3 \iff 1 \leqslant x \leqslant 27$.

Ответ: $[1;\ 27]$.

16 Нужно выпустить 60 изделий на двух заводах (на каждом t^2 часов работы дают t изделий). Час на первом заводе стоит 200 руб., на втором — 300 руб. Найдите наименьшие затраты на оплату труда.

Ответ: 432 000 руб.

Решение. $x+y=60$, минимум $200x^2+300y^2$ при $200x=300y \Rightarrow x=36$, $y=24$. Затраты $259\,200+172\,800=432\,000$ руб.

17 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD.

а) Докажите, что $AB=2AD$.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AK=15$, $BK=8$.

Ответ: б) 120

Решение. а) Прямые AB и CD параллельны, поэтому $\angle AKD=\angle KAB$ как накрест лежащие углы. AK — биссектриса, поэтому $\angle KAB=\angle KAD$. Значит, $\angle AKD=\angle KAD$, и треугольник ADK равнобедренный: $DK=AD$. Аналогично треугольник BCK равнобедренный: $CK=BC=AD$. Тогда $AB=CD=DK+KC=2AD$.

б) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к стороне AB, равна 180°, поэтому $\angle KAB+\angle KBA=90^\circ$ и $\angle AKB=90^\circ$. Треугольник ABK и параллелограмм имеют общее основание AB и одинаковую высоту (расстояние между прямыми AB и CD), поэтому $S_{ABCD}=2S_{ABK}=AK\cdot BK$. $S_{ABCD}=15\cdot 8=120$.

Ответ: б) 120.

18 Найдите все значения a, при которых уравнение cos(2x)+a·cos x=0 имеет ровно два корня на отрезке [0;π].

Ответ: a∈[−1;1]

Решение. Положим t=cos x. На [0;π] косинус принимает каждое значение из [−1;1] ровно один раз. Уравнение становится 2t²+a t−1=0. Его корни различны и имеют разные знаки, поскольку их произведение равно −1/2. Отрицательный корень не меньше −1 тогда и только тогда, когда значение трёхчлена в точке −1 неотрицательно: 1−a≥0. Положительный корень не больше 1 тогда и только тогда, когда значение в точке 1 неотрицательно: 1+a≥0. Таким образом, оба корня входят в [−1;1] ровно при −1≤a≤1.

19 Квадратное уравнение $x^2-px+q=0$ имеет два натуральных корня; p и q тоже натуральные числа.

а) Найдите p, если $q=5$.

б) Возможно ли $p<10$ при $q>30$?

в) Найдите наименьшее p, при котором $q>30$ возможно.

Ответ: а) 6; б) нет; в) 12

Решение. Пусть корни $u,v\in\mathbb{N}$. По теореме Виета $p=u+v$, $q=uv$.

а) $uv=5$, значит $\{u,v\}=\{1,5\}$ и $p=6$.

б) При $p<10$ имеем $p\le 9$. По неравенству $uv\le (u+v)^2/4\le 81/4<30$, противоречие.

в) При $p\le 11$ имеем $uv\le 121/4<31$, а целое $q>30$ должно быть хотя бы 31. Следовательно, $p\ge 12$. Значение $p=12$ достижимо при $u=5$, $v=7$: $q=35>30$.