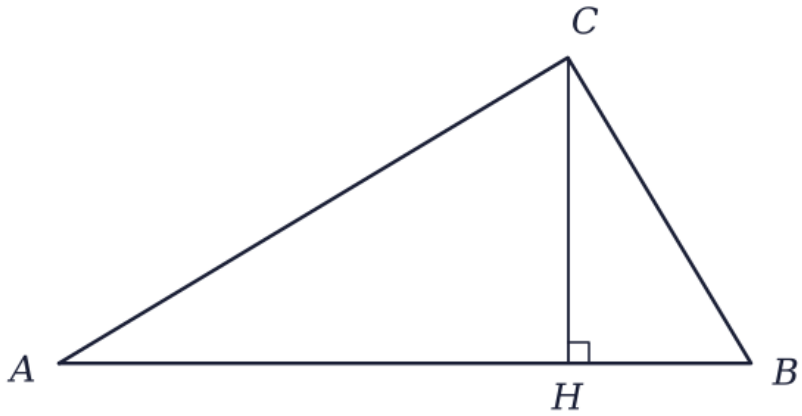
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AH = 25$, $BH = 9$. Найдите CH.



Ответ: 15

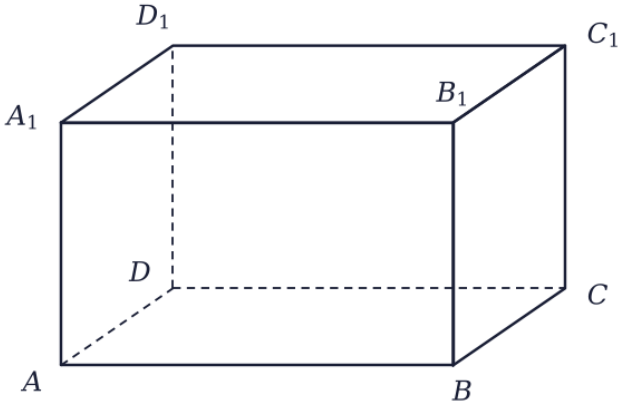
Решение. Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, есть среднее пропорциональное отрезков гипотенузы: $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{25 \cdot 9} = 15$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(-6;\ 6)$ и $\vec{b}\,(1;\ -2)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: -18

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) = -18$.

3 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 6$, $BC = 9$, $AA_1 = 2$. Найдите длину диагонали AC_1.



Ответ: 11

Решение. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений: $AC_1 = \sqrt{6^2 + 9^2 + 2^2} = \sqrt{121} = 11$.

4 В сборнике билетов по истории всего 400 билетов, в 349 из них встречается вопрос по теме «Петровские реформы». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по этой теме.

Ответ: 0,1275

Решение. Билетов без вопроса по этой теме $400 - 349 = 51$, $P = \dfrac{51}{400} = 0{,}1275$.

5 Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,2, второго — 0,3. Найдите вероятность того, что в мишень попадёт ровно один стрелок.

Ответ: 0,38

Решение. Ровно одно попадание: первый попал, второй нет, или наоборот. $P = 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}38$.

6 Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x-2} = 125$.

Ответ: -1

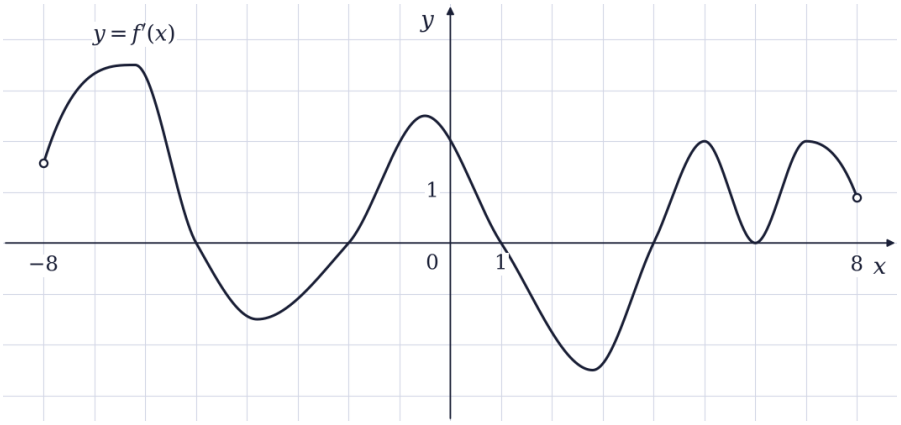
Решение. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x-2} = 5^{2-x}$, $125 = 5^3$. Тогда $2 - x = 3$, $x = -1$.

7 Найдите значение выражения $4\operatorname{tg} 36^\circ \cdot \operatorname{tg} 126^\circ$.

Ответ: -4

Решение. $\operatorname{tg} 126^\circ = -\operatorname{ctg} 36^\circ$, а $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, поэтому выражение равно -4.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8;\ 8)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: 4

Решение. Функция возрастает там, где $f'(x) > 0$ (касание оси без смены знака промежуток не разрывает): $(-8;\ -5)$, $(-2;\ 1)$, $(4;\ 8)$. Наибольшая длина равна 4.

9 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 4 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 4 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 32$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}9$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 28,8 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: 8

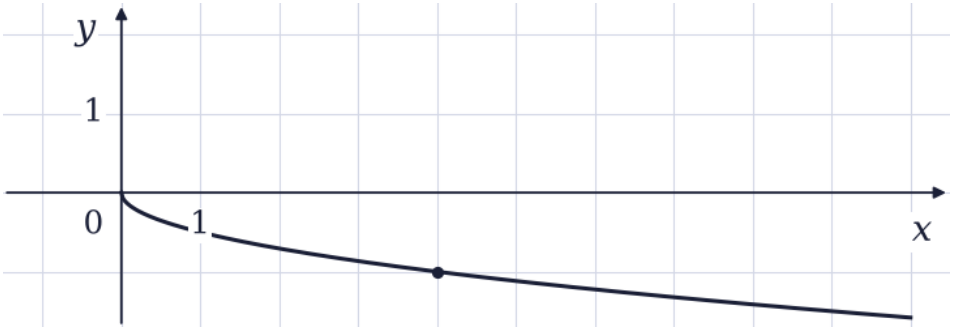
Решение. $RC = 4 \cdot 10^{6} \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 16$. $28{,}8 = 0{,}9 \cdot 16 \cdot \log_2 \dfrac{32}{U}$, откуда $\log_2 \dfrac{32}{U} = 2$, $U = \dfrac{32}{4} = 8$.

10 Первая труба пропускает на 3 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 180 литров она заполняет на 10 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: 6

Решение. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{180}{x} - \dfrac{180}{x+3} = 10$, положительный корень $x = 6$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(49)$.



Ответ: -3,5

Решение. График проходит через точку $(4;\ -1)$: $-1 = k\sqrt{4}$, $k = -0{,}5$. $f(49) = -0{,}5 \cdot \sqrt{49} = -3{,}5$.

12 Найдите наименьшее значение функции y = x + 49/x + 103 на отрезке [3,5; 21].

Ответ: 117

Решение. На отрезке x > 0. Производная $y' = 1 - 49/x^2$ отрицательна при x < 7 и положительна при x > 7. Минимум достигается при x = 7; y(7) = 7 + 7 + 103 = 117.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos^2 x - 4\sin(\pi - x) = 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\ -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$**; б)** $-\dfrac{5\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\sin(\pi - x) = \sin x$, а $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$\left(1 - \sin^2 x\right) - 4\sin x = 4 \iff \sin^2 x + 4\sin x + 3 = 0.$$

Отсюда $\sin x = -1$ или $\sin x = -3$. Уравнение $\sin x = -3$ корней не имеет, так как $|-3| > 1$.

Если $\sin x = -1$, то $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\ -\dfrac{5\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$-4\pi \leqslant -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k \leqslant -\dfrac{5\pi}{2} \iff -\dfrac{7}{4} \leqslant k \leqslant -1, k \in \{-1\}$: $x = -\dfrac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{5\pi}{2}$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 на ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости ACC_1.

б) Найдите угол между плоскостью BDM и плоскостью $ABCD$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Решение. а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD \perp AC$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1 \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, значит, $BD \perp (ACC_1)$. Плоскость BDM проходит через прямую BD, перпендикулярную плоскости ACC_1, поэтому плоскости BDM и ACC_1 перпендикулярны.

б) Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Прямая OM лежит в плоскости ACC_1, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$; кроме того, $OC \perp BD$. Значит, $\angle MOC$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями BDM и $ABCD$. $OC = \dfrac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$, $CM = 4$, $\operatorname{tg}\angle MOC = \dfrac{CM}{OC} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

15 Решите неравенство

$$\log_2^2 x + \log_2 x - 2 \leqslant 0.$$

Ответ: $[0{,}25;\ 2]$

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Сделаем замену $t = \log_2 x$: $t^2 + t - 2 \leqslant 0 \iff (t+2)(t-1) \leqslant 0 \iff -2 \leqslant t \leqslant 1$.

Функция $y = \log_2 x$ возрастает, поэтому $-2 \leqslant \log_2 x \leqslant 1 \iff 0{,}25 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $[0{,}25;\ 2]$.

16 Расход на перевозку за час пути: $(0{,}25v^2 + 2500)$ руб., где v — скорость в км/ч. Найдите скорость, при которой расход на 300 км пути наименьший.

Ответ: 100 км/ч

Решение. Расход $= \dfrac{300}{v}(0{,}25v^2 + 2500) = 300\left(0{,}25v + \dfrac{2500}{v}\right)$, минимум при $0{,}25v = \dfrac{2500}{v} \Rightarrow v = 100$.

17 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD.

а) Докажите, что $AB = 2AD$.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AD = 5$, $AK = 6$.

Ответ: б) 48

Решение. а) Прямые AB и CD параллельны, поэтому $\angle AKD = \angle KAB$ как накрест лежащие углы. AK — биссектриса, поэтому $\angle KAB = \angle KAD$. Значит, $\angle AKD = \angle KAD$, и треугольник ADK равнобедренный: $DK = AD$. Аналогично треугольник BCK равнобедренный: $CK = BC = AD$. Тогда $AB = CD = DK + KC = 2AD$.
б) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к стороне AB, равна 180°, поэтому $\angle KAB + \angle KBA = 90^\circ$ и $\angle AKB = 90^\circ$. Треугольник ABK и параллелограмм имеют общее основание AB и одинаковую высоту (расстояние между прямыми AB и CD), поэтому $S_{ABCD} = 2S_{ABK} = AK \cdot BK$. По пункту а) $AB = 2AD = 10$. Из прямоугольного треугольника ABK: $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. $S_{ABCD} = 6 \cdot 8 = 48$.
Ответ: б) 48.

18 Найдите все значения a, при которых уравнение $\log_2(x-a)+\log_2(5-x)=1$ имеет ровно один действительный корень.

Ответ: a=5−2√2

Решение. Область определения a<x<5; она не пуста только при a<5. После объединения логарифмов получаем (x−a)(5−x)=2. На (a;5) левая часть — вогнутая парабола, равная нулю на границах и достигающая максимума $(5-a)^2/4$ посередине. Ровно один корень возникает при касании уровня 2: $(5-a)^2/4=2$. Так как 5−a>0, имеем a=5−2√2.

19 За каждый пройденный уровень игры дают одну, две или три звезды. При этом заряд уменьшается соответственно на 9, 6 или 3 пункта.

а) Может ли заряд уменьшиться ровно на 32 пункта?

б) Сколько уровней пройдено, если заряд уменьшился на 33 пункта, а звёзд набрано 17?

в) За уровни с одной, двумя и тремя звёздами начисляют соответственно 2000, 5000 и 9000 очков. Каков наибольший результат при условиях пункта б)?

Ответ: а) нет; б) 7; в) 49 000

Решение. а) Уменьшение заряда за каждый уровень кратно 3, а 32 не делится на 3.
б) Если на уровне получено s звёзд, заряд убывает на 3(4−s). За n уровней он убыл на 3(4n−17)=33. Отсюда 4n=28, n=7.
в) Обозначим числа уровней с одной, двумя и тремя звёздами через x,y,z. Тогда x+y+z=7, x+2y+3z=17; вычитание даёт 2x+y=4. Возможны только (x,y,z)=(0,4,3),(1,2,4),(2,0,5). Очки соответственно 47 000, 48 000 и 49 000. Последняя комбинация достижима.