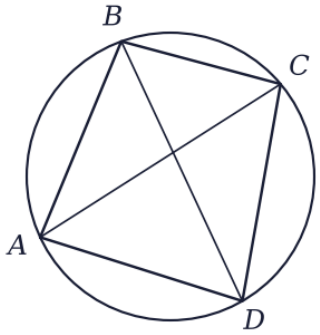
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 42°, угол CAD равен 37°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 79

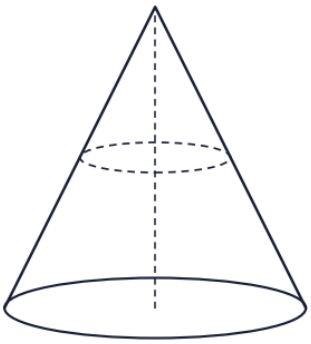
Решение. Вписанные углы CBD и CAD опираются на одну дугу CD, поэтому $\angle CBD = \angle CAD = 37^\circ$. Тогда $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 42^\circ + 37^\circ = 79^\circ$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(1;\ 3)$ и $\vec{b}\,(-6;\ -3)$. Найдите длину вектора $4\vec{a} + 2\vec{b}$.

Ответ: 10

Решение. $4\vec{a} + 2\vec{b} = (-8;\ 6)$, $|4\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{64 + 36} = 10$.

3 Объём конуса равен 72. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.



Ответ: 9

Решение. Меньший конус подобен исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$, объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия: $V' = \frac{72}{8} = 9$.

4 В коробке лежат 40 одинаковых на вид чайных пакетиков: 14 пакетиков с зелёным чаем, 17 — с белым, остальные — с чёрным. Найдите вероятность того, что случайно выбранный пакетик окажется с чёрным чаем.

Ответ: 0,225

Решение. Пакетиков с чёрным чаем $40 - 14 - 17 = 9$; $P = \frac{9}{40} = 0{,}225$.

5 Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,2, второго — 0,6. Найдите вероятность того, что в мишень попадёт ровно один стрелок.

Ответ: 0,56

Решение. Ровно одно попадание: первый попал, второй нет, или наоборот. $P = 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}56$.

6 Найдите корень уравнения $\log_5(29 - x) = 2$.

Ответ: 4

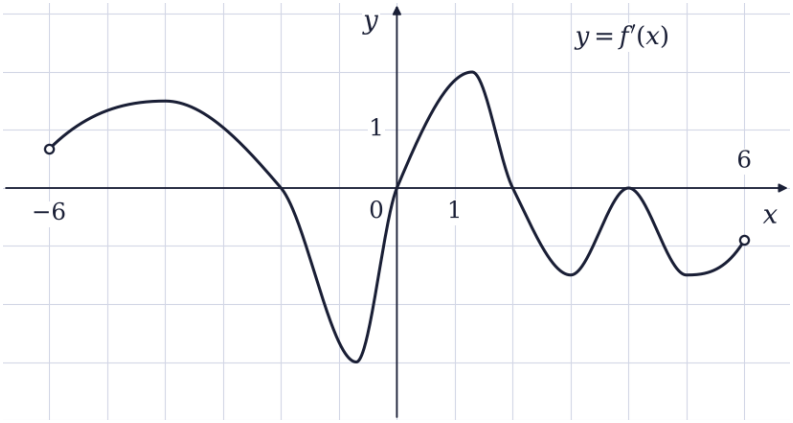
Решение. По определению логарифма $29 - x = 5^2 = 25$, откуда $x = 4$. Аргумент логарифма положителен.

7 Найдите значение выражения $\log_3 45 - \log_3 5$.

Ответ: 2

Решение. $\log_3 45 - \log_3 5 = \log_3 \dfrac{45}{5} = \log_3 9 = 2$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6;\ 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: 4

Решение. Функция возрастает там, где $f'(x) > 0$ (касание оси без смены знака промежуток не разрывает): $(-6;\ -2)$, $(0;\ 2)$. Наибольшая длина равна 4.

9 Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 10$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 2$ м/с². За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 16 метров. Ответ дайте в секундах.

Ответ: 2

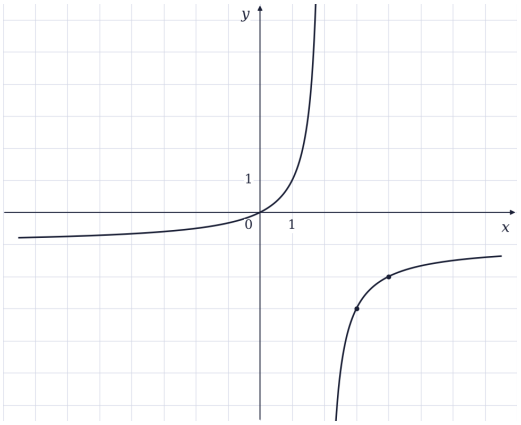
Решение. $10t - \dfrac{2t^2}{2} = 16 \iff t^2 - 10t + 16 = 0$. Корни: $t = 2$ и $t = 8$. Торможение длится $\dfrac{v_0}{a} = 5$ с, поэтому подходит $t = 2$.

10 Смешав 10-процентный и 85-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 35-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 80-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 60-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 10-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: 10

Решение. Пусть x кг — масса 10-процентного раствора, y кг — 85-процентного. Тогда $0{,}1x + 0{,}85y = 0{,}35(x + y + 10)$ и $0{,}1x + 0{,}85y + 8 = 0{,}6(x + y + 10)$. Вычитая, получим $x + y + 10 = 32$, откуда $x = 10$, $y = 12$.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \dfrac{k}{x + a} + b$, где числа a, b и k — целые. Найдите значение $f(-8)$.



Ответ: -0,8

Решение. Асимптоты графика: $x = 2$ и $y = -1$, поэтому $a = -2$, $b = -1$. По точке $(3;\ -3)$: $-3 = \dfrac{k}{1} - 1$, откуда $k = -2$. $f(-8) = \dfrac{-2}{-10} - 1 = -0{,}8$.

12 Найдите точку максимума функции y = $(x - 6)^3 - 147(x - 6) + 100$.

Ответ: -1

Решение. Производная y′ = $3((x - 6)^2 - 49)$. Она равна нулю при x = -1 и x = 13. Знаки производной на трёх промежутках: +, −, +. Поэтому точка максимума x = -1, точка минимума x = 13. Ответ: -1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos^2 x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\ -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; **б)** $-\dfrac{7\pi}{2}; -\dfrac{5\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\sin(\pi - x) = \sin x$, а $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$\left(1-\sin^2 x\right)-0\sin x=0 \iff \sin^2 x-1=0.$$

Отсюда $\sin x=1$ или $\sin x=-1$.

Если $\sin x=1$, то $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Если $\sin x=-1$, то $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\ -\dfrac{5\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$-4\pi\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\leqslant-\dfrac{5\pi}{2} \iff -\dfrac{9}{4}\leqslant k\leqslant-\dfrac{3}{2}, k\in\{-2\}$: $x=-\dfrac{7\pi}{2}$.

$-4\pi\leqslant-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\leqslant-\dfrac{5\pi}{2} \iff -\dfrac{7}{4}\leqslant n\leqslant-1, n\in\{-1\}$: $x=-\dfrac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{2}$; $-\dfrac{5\pi}{2}$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 16 на ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM:MC_1=1:3$.

а) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости ACC_1.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью BDM.

Ответ: б) $96\sqrt{2}$

Решение. а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD\perp AC$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1\perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, значит, $BD\perp(ACC_1)$. Плоскость BDM проходит через прямую BD, перпендикулярную плоскости ACC_1, поэтому плоскости BDM и ACC_1 перпендикулярны.

б) Точка M лежит на ребре CC_1, поэтому плоскость BDM пересекает грани куба по отрезкам BD, BM и DM, и сечение — треугольник BDM. Пусть O — центр квадрата $ABCD$; прямая OM лежит в плоскости ACC_1, поэтому по пункту а) $OM\perp BD$, и OM — высота треугольника BDM. $OC=\dfrac{16\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}$, $CM=4$, $OM=\sqrt{OC^2+CM^2}=\sqrt{128+16}=12$, $BD=16\sqrt{2}$. $S_{BDM}=\dfrac{1}{2}\cdot16\sqrt{2}\cdot12=96\sqrt{2}$.

Ответ: б) $96\sqrt{2}$.

15 Решите неравенство

$$\log_3^2 x-6\log_3 x+8\geqslant0.$$

Ответ: $(0;\ 9]\cup[81;\ +\infty)$

Решение. ОДЗ: $x>0$. Сделаем замену $t=\log_3 x$: $t^2-6t+8\geqslant0 \iff (t-2)(t-4)\geqslant0 \iff t\leqslant2$ или $t\geqslant4$.

Функция $y=\log_3 x$ возрастает, поэтому $\log_3 x\leqslant2 \iff 0<x\leqslant9$, $\log_3 x\geqslant4 \iff$

16 Картина стоит 900 тыс. руб., её цена каждый год растёт на 200 тыс. руб. Банк даёт 10 % годовых. Через сколько лет выгоднее всего продать картину и положить деньги в банк?

Ответ: через 6 лет

Решение. Цена через n лет $0{,}9 + 0{,}2n$ (млн). Держать, пока рост больше 10 %: $0{,}2 > 0{,}1V \Rightarrow V < 2$. При $n = 5$ $V = 1{,}9$ — держать; при $n = 6$ $V = 2{,}1$ — продавать.

17 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ACH и BCH соответственно.

а) Докажите, что $O_1O_2 = r\sqrt{2}$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

б) Найдите O_1O_2, если $AC = 8$, $BC = 6$.

Ответ: б) $2\sqrt{2}$

Решение. а) Треугольники ACH и ABC подобны (прямоугольные, с общим острым углом A), коэффициент подобия $\dfrac{AC}{AB}$; треугольники BCH и ABC подобны с коэффициентом $\dfrac{BC}{AB}$. Поэтому радиусы вписанных окружностей равны $r_1 = r \cdot \dfrac{AC}{AB}$ и $r_2 = r \cdot \dfrac{BC}{AB}$.

Центр вписанной окружности лежит на биссектрисе угла, поэтому HO_1 и HO_2 — биссектрисы прямых углов AHC и BHC: $\angle O_1HC = \angle O_2HC = 45^\circ$, $\angle O_1HO_2 = 90^\circ$. Расстояние от O_1 до сторон угла AHC равно r_1, поэтому $HO_1 = r_1\sqrt{2}$; аналогично $HO_2 = r_2\sqrt{2}$.

По теореме Пифагора $O_1O_2^2 = 2r_1^2 + 2r_2^2 = 2r^2 \cdot \dfrac{AC^2 + BC^2}{AB^2} = 2r^2$, то есть $O_1O_2 = r\sqrt{2}$.

б) $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник: $r = \dfrac{AC + BC - AB}{2} = \dfrac{8 + 6 - 10}{2} = 2$. По пункту а) $O_1O_2 = 2\sqrt{2}$.

Ответ: б) $2\sqrt{2}$.

18 Найдите все значения a, при которых уравнение |x²−1|=a имеет ровно четыре различных действительных корня.

Ответ: a∈(0;1)

Решение. При a<0 решений нет. При a≥0 уравнение равносильно совокупности x²=1+a и x²=1−a. Для четырёх корней обе правые части должны быть строго положительны и различны, то есть 0<a<1. При a=0 пары совпадают; при a=1 второе уравнение даёт только x=0; при a>1 оно не имеет решений.

19 На столе лежат красные и синие карточки с попарно различными числами внутри каждого цвета. Все числа целые и больше −32; на красных написаны кратные 8, на синих — кратные 5. Наибольшее число на красной карточке равно утроенному количеству синих карточек; наибольшее синее число равно количеству красных карточек.

а) Может ли синих карточек быть одна?

б) Может ли их быть 40?

в) Каково их наибольшее возможное количество?

Ответ: а) нет; б) нет; в) 8

Решение. Пусть синих карточек b, красных r. Наибольшее красное число $3b$ должно делиться на 8, поэтому b кратно 8. Наибольшее синее число r делится на 5, поэтому r кратно 5. Красных допустимых чисел от -24 до $3b$ не больше $3b/8+4$. Синих допустимых чисел от -30 до r не больше $r/5+7$. Следовательно, $r\le 3b/8+4$, $b\le r/5+7$, то есть $5(b-7)\le r\le 3b/8+4$. Отсюда $37b\le 312$, значит $b\le 8$ (b целое). а) $b=1$ уже нарушает кратность 8. б) $b=40$ превышает верхнюю границу. в) $b=8$ достижимо: взять пять красных чисел $-24,-16,-8,0,24$ (наибольшее $24=3\cdot 8$) и восемь синих $-30,-25,-20,-15,-10,-5,0,5$ (наибольшее $5=r$).