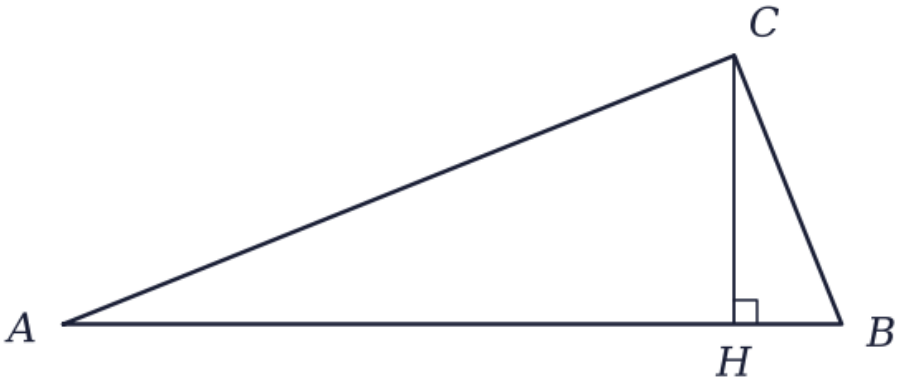
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AH = 25$, $BH = 4$. Найдите CH.



Ответ: 10

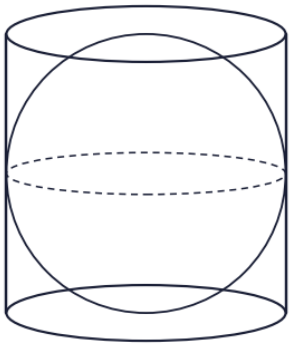
Решение. Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, есть среднее пропорциональное отрезков гипотенузы: $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{25 \cdot 4} = 10$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(-4;\ 1)$ и $\vec{b}\,(-5;\ -2)$. Найдите длину вектора $4\vec{a} - 2\vec{b}$.

Ответ: 10

Решение. $4\vec{a} - 2\vec{b} = (-6;\ 8)$, $|4\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{36 + 64} = 10$.

3 В цилиндр вписан шар: шар касается обоих оснований цилиндра и его боковой поверхности. Объём цилиндра равен 33. Найдите объём шара.



Ответ: 22

Решение. Высота цилиндра равна диаметру шара: $V_{\text{цил}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 33$, откуда $\pi r^3 = 16{,}5$; $V_{\text{шара}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 22$.

4 В среднем из 500 электрочайников, поступивших в продажу, 13 неисправны. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля прибор исправен.

Ответ: 0,974

Решение. $P = \dfrac{500 - 13}{500} = 0{,}974$.

5 Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 70% этих стёкол, вторая — 30%. Первая фабрика выпускает 2% бракованных стёкол, а вторая — 5%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ: 0,029

Решение. По формуле полной вероятности: $P = 0{,}7 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}05 = 0{,}029$.

6 Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3} = 8$.

Ответ: 0

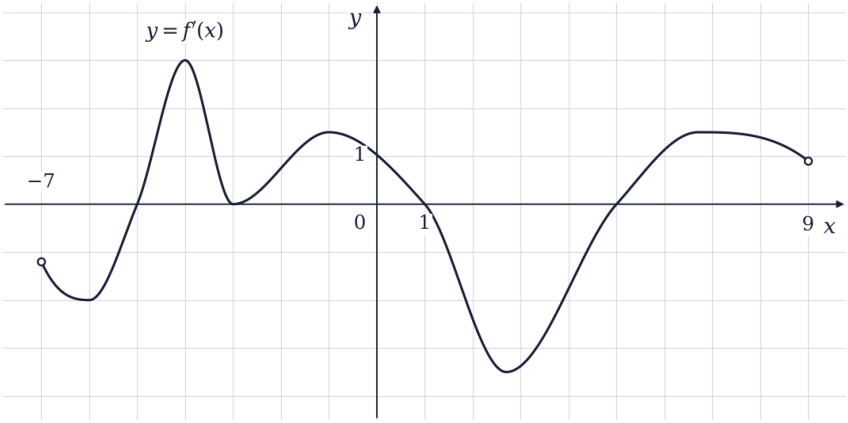
Решение. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3} = 2^{3-x}$, $8 = 2^3$. Тогда $3 - x = 3$, $x = 0$.

7 Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{320}}$.

Ответ: 0,25

Решение. $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{320}} = \sqrt{\dfrac{20}{320}} = \dfrac{2}{8} = 0{,}25$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7;\ 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 1

Решение. В точке максимума производная меняет знак с «+» на «−». Такая точка одна: $x = 1$.

9 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 23t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 12 метров?

Ответ: 3,4

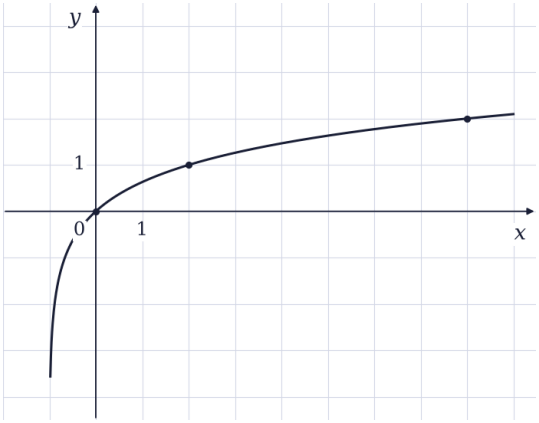
Решение. $h(t) \geqslant 12 \iff 5t^2 - 23t + 12 \leqslant 0 \iff 0{,}6 \leqslant t \leqslant 4$. Мяч находится не ниже 12 м в течение $4 - 0{,}6 = 3{,}4$ с.

10 Два велосипедиста одновременно отправились в 140-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 4 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 10

Решение. Пусть v — скорость второго. $\dfrac{140}{v} - \dfrac{140}{v+4} = 4 \iff 4v^2 + 16v - 560 = 0$, положительный корень $v = 10$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x + b)$. Найдите $f(728)$.



Ответ: 6

Решение. $\log_a(x + b) = 0$ при $x + b = 1$; график пересекает ось абсцисс в точке $x = 0$, поэтому $b = 1$. По точке $(8;\ 2)$ находим $a = 3$. $f(728) = \log_3 729 = 6$.

12 Найдите точку минимума функции y = $(x - 6)^3 - 147(x - 6) + 97$.

Ответ: 13

Решение. Производная $y' = 3((x - 6)^2 - 49)$. Она равна нулю при x = -1 и x = 13. Знаки производной на трёх промежутках: +, −, +. Поэтому точка максимума x = -1, точка минимума x = 13. Ответ: 13.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x - 2\sin(x - \pi) = 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; **б)** $\dfrac{5\pi}{2}$; 3π; 4π

Решение. а) По формуле приведения $\sin(x - \pi) = -\sin x$, а $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 2\sin x = 1 \iff \sin^2 x - \sin x = 0.$$

Отсюда $\sin x = 1$ или $\sin x = 0$.

Если $\sin x = 1$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$, с помощью двойных неравенств (после

деления на π получаем неравенства для k).

$\frac{5\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant 4\pi \iff 1 \leqslant k \leqslant \frac{7}{4}, k \in \{1\}: x = \frac{5\pi}{2}.$

$\frac{5\pi}{2} \leqslant \pi n \leqslant 4\pi \iff \frac{5}{2} \leqslant n \leqslant 4, n \in \{3, 4\}: x = 3\pi, x = 4\pi.$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}; \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}; 3\pi; 4\pi$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 2, боковое ребро равно 7.

а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости SAC.

б) Найдите угол между прямой SB и плоскостью SAC.

Ответ: б) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{7}$

Решение. а) Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Диагонали квадрата перпендикулярны: $BD \perp AC$. Пирамида правильная, поэтому её высота — отрезок SO, и $SO \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и SO плоскости SAC, значит, $BD \perp (SAC)$.

б) По пункту а) $BO \perp (SAC)$, поэтому SO — проекция прямой SB на плоскость SAC, и искомый угол равен $\angle BSO$. В прямоугольном треугольнике BSO: $BO = \frac{2\sqrt{2}}{2}$, $SB = 7$, $\sin \angle BSO = \frac{BO}{SB} = \frac{\sqrt{2}}{7}$.

Ответ: б) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{7}$.

15 Решите неравенство

$$\log_3^2 x - 1 \geqslant 0.$$

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{3}\right] \cup [3;\ +\infty)$

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Сделаем замену $t = \log_3 x$: $t^2 - 1 \geqslant 0 \iff (t+1)(t-1) \geqslant 0 \iff t \leqslant -1$ или $t \geqslant 1$.

Функция $y = \log_3 x$ возрастает, поэтому $\log_3 x \leqslant -1 \iff 0 < x \leqslant \frac{1}{3}, \log_3 x \geqslant 1 \iff x \geqslant 3$.

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{3}\right] \cup [3;\ +\infty)$.

16 Мастерская делает стулья и столы. Стул: 2 ч работы и 1 м доски, прибыль 1 тыс. руб. Стол: 3 ч и 4 м доски, прибыль 2 тыс. руб. Доступно 120 ч и 120 м доски. Найдите наибольшую прибыль (тыс. руб.).

Ответ: 72 тыс. руб.

Решение. Ограничения $2x+3y\le 120$, $x+4y\le 120$. Вершины: $(60;\,0)\to 60$, $(0;\,30)\to 60$, $(24;\,24)\to 72$.

17 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD.

а) Докажите, что $AB=2AD$.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AK=12$, $BK=5$.

Ответ: б) 60

Решение. а) Прямые AB и CD параллельны, поэтому $\angle AKD=\angle KAB$ как накрест лежащие углы. AK — биссектриса, поэтому $\angle KAB=\angle KAD$. Значит, $\angle AKD=\angle KAD$, и треугольник ADK равнобедренный: $DK=AD$. Аналогично треугольник BCK равнобедренный: $CK=BC=AD$. Тогда $AB=CD=DK+KC=2AD$.

б) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к стороне AB, равна 180°, поэтому $\angle KAB+\angle KBA=90^\circ$ и $\angle AKB=90^\circ$. Треугольник ABK и параллелограмм имеют общее основание AB и одинаковую высоту (расстояние между прямыми AB и CD), поэтому $S_{ABCD}=2S_{ABK}=AK\cdot BK$. $S_{ABCD}=12\cdot 5=60$.

Ответ: б) 60.

18 Найдите все значения a, при которых система $x^2+y^2=4$, $(x-3)^2+y^2=a^2$ имеет ровно одно решение (x;y).

Ответ: a∈{−5;−1;1;5}

Решение. Уравнения задают окружности с центрами (0;0) и (3;0), радиусами 2 и |a|. При a=0 второе множество состоит из точки (3;0), не лежащей на первой окружности. Одна общая точка при внешнем касании 2+|a|=3 (|a|=1) либо внутреннем касании |2−|a||=3 (|a|=5). При этих значениях окружности действительно имеют ровно одну общую точку.

19

Среди 1200 монет есть N монет по 2 рубля и 1200−N монет по 5 рублей, причём $1 \le N \le 1199$. Любые выбранные 500 монет стоят не меньше четверти стоимости всех монет.

а) Возможно ли N=400?

б) Возможно ли N=600?

в) Сколько значений N удовлетворяет условию?

Ответ: а) да; б) нет; в) 977

Решение. Общая стоимость равна 6000−3N, её четверть — 1500−3N/4. Дешевле всего набор из 500 монет с максимально возможным числом двухрублёвых.

Если $N<500$, стоимость такого набора $2N+5(500-N)=2500-3N$. Неравенство $2500-3N \ge 1500-3N/4$ эквивалентно $N \le 4000/9$, то есть $N \le 444$.

Если $N \ge 500$, минимум равен 1000. Неравенство $1000 \ge 1500-3N/4$ эквивалентно $N \ge 2000/3$, то есть $N \ge 667$.

а) 400 входит в первый промежуток. б) 600 не входит ни в один. в) Подходят N=1,…,444 и N=667,…,1199; их 444+(1199−667+1)=977.