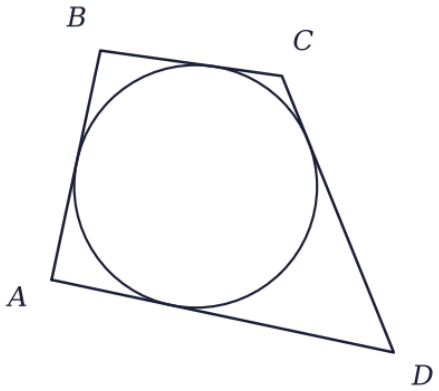
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 54, вписана окружность, $AB = 16$, $BC = 22$. Найдите CD.



Ответ: 11

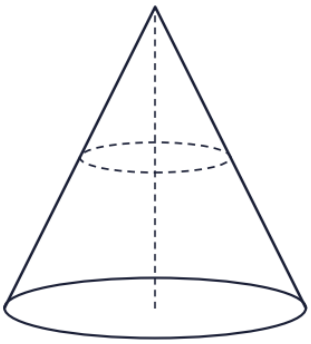
Решение. В описанном четырёхугольнике $AB + CD = BC + AD = \dfrac{P}{2} = 27$, поэтому $CD = 27 - 16 = 11$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(4;\ 4)$ и $\vec{b}\,(6;\ -4)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: 8

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 6 + 4 \cdot (-4) = 8$.

3 Через середину высоты конуса параллельно основанию проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Объём меньшего конуса равен 9. Найдите объём исходного конуса.



Ответ: 72

Решение. Меньший конус подобен исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$, объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия: $V = 8 \cdot 9 = 72$.

4 В среднем из 1250 садовых насосов в продаже 38 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ответ: 0,9696

Решение. $P = \dfrac{1250 - 38}{1250} = 0{,}9696$.

5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первые три мишени и не попадёт в последнюю.

Ответ: 0,0864

Решение. Выстрелы независимы: $P = 0{,}6^3 \cdot 0{,}4 = 0{,}0864$.

6 Найдите корень уравнения $\log_5(44 - x) = 2$.

Ответ: 19

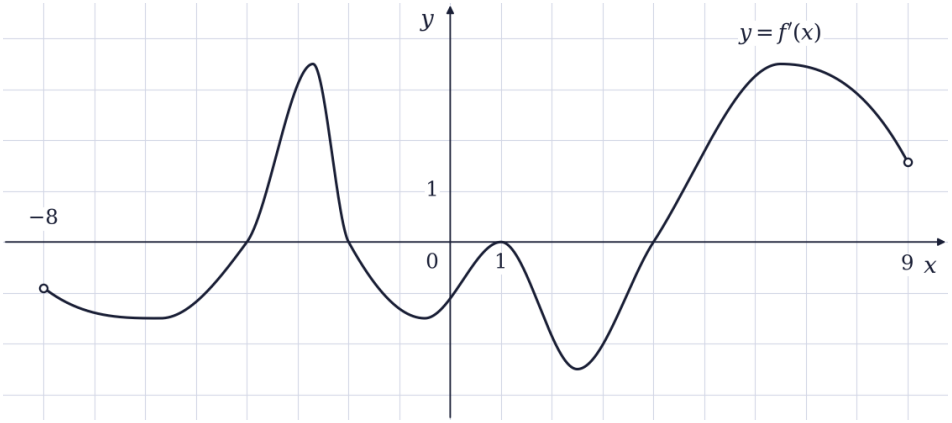
Решение. По определению логарифма $44 - x = 5^2 = 25$, откуда $x = 19$. Аргумент логарифма положителен.

7 Найдите значение выражения $\dfrac{6\sin 18^\circ}{\sin 9^\circ \cdot \sin 81^\circ}$.

Ответ: 12

Решение. $\sin 81^\circ = \cos 9^\circ$, а $\sin 18^\circ = 2\sin 9^\circ \cos 9^\circ$, поэтому выражение равно $6 \cdot 2 = 12$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8;\ 9)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 2

Решение. В точке минимума производная меняет знак с «−» на «+». Таких точек 2: $-4;\ 4$.

9 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 8 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 3 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 40$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}2$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 86,4 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: 5

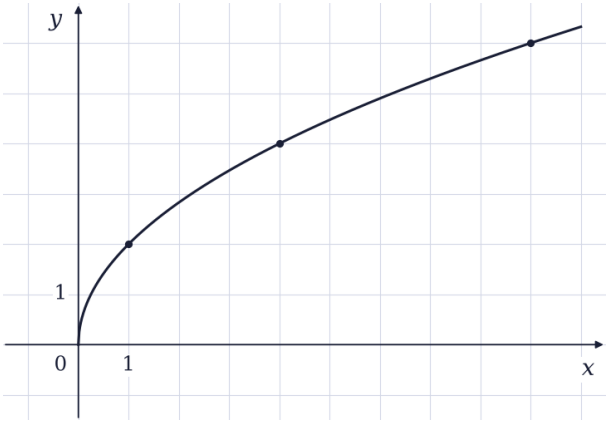
Решение. $RC = 3 \cdot 10^6 \cdot 8 \cdot 10^{-6} = 24$. $86{,}4 = 1{,}2 \cdot 24 \cdot \log_2 \dfrac{40}{U}$, откуда $\log_2 \dfrac{40}{U} = 3$, $U = \dfrac{40}{8} = 5$.

10 Первая труба пропускает на 8 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 210 литров она заполняет на 16 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: 7

Решение. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{210}{x} - \dfrac{210}{x+8} = 16$, положительный корень $x = 7$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(81)$.



Ответ: 18

Решение. График проходит через точку $(9;\ 6)$: $6 = k\sqrt{9}$, $k = 2$. $f(81) = 2 \cdot \sqrt{81} = 18$.

12 Найдите наибольшее значение функции y = $(x - 5)^3 - 108(x - 5) + 94$ на отрезке [-7; 11].

Ответ: 526

Решение. Производная y′ = $3((x - 5)^2 - 36)$; критические точки x = -1, x = 11. На концах отрезка y(-7) = -338, y(11) = -338. Во внутренней критической точке y(-1) = 526. Наибольшее значение: 526.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x - 5\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; **б)** $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$

Решение. а) По формуле приведения $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$, а $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Уравнение принимает вид

$$\left(2\cos^2 x - 1\right) + 5\cos x = 2 \iff 2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0.$$

Отсюда $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -3$. Уравнение $\cos x = -3$ корней не имеет, так как $|-3| > 1$.

Если $\cos x = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$\pi \leqslant \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant \dfrac{5\pi}{2} \iff \dfrac{1}{3} \leqslant k \leqslant \dfrac{13}{12}, k \in \{1\}\colon x = \dfrac{7\pi}{3}.$

$\pi \leqslant -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant \dfrac{5\pi}{2} \iff \dfrac{2}{3} \leqslant n \leqslant \dfrac{17}{12}, n \in \{1\}\colon x = \dfrac{5\pi}{3}.$

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}; -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{5\pi}{3}; \dfrac{7\pi}{3}$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 12, а боковое ребро равно 8. Точка M — середина ребра AB.

а) Докажите, что прямая CM перпендикулярна плоскости ABB_1.

б) Найдите угол между прямой A_1C и плоскостью ABB_1.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \dfrac{3\sqrt{3}}{5}$

Решение. а) Треугольник ABC равносторонний, его медиана CM является высотой: $CM \perp AB$. Призма правильная, поэтому боковое ребро AA_1 перпендикулярно плоскости основания, и $AA_1 \perp CM$. Прямая CM перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB и AA_1 плоскости ABB_1, значит, $CM \perp (ABB_1)$.

б) По пункту а) M — проекция точки C на плоскость ABB_1, поэтому A_1M — проекция прямой A_1C, и искомый угол равен $\angle CA_1M$. $CM = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, $A_1M = \sqrt{AA_1^2 + AM^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. В прямоугольном треугольнике CA_1M: $\operatorname{tg} \angle CA_1M = \dfrac{CM}{A_1M} = \dfrac{3\sqrt{3}}{5}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \dfrac{3\sqrt{3}}{5}$.

15 Решите неравенство

$$\frac{9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27}{\log_3(x+4)} \leqslant 0.$$

Ответ: $(-4;\ -3) \cup [1;\ 2]$

Решение. Область допустимых значений: $x + 4 > 0$ и $\log_3(x+4)\ /\ 0$, ~~то~~есть $x > -4$, $x\ /\ = -3$.

$4 \cdot 3^{x+1} = 12 \cdot 3^x$, числитель раскладывается на множители: $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = (3^x - 3)(3^x - 9)$.

Функции $y = 3^t$ и $y = \log_3 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак $3^x - 3$ совпадает со знаком $x - 1$, знак $3^x - 9$ — со знаком $x - 2$, знак $\log_3(x+4) = \log_3(x+4) - \log_3 1$ — со знаком $x + 3$. Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x+3} \leqslant 0, \quad x > -4.$$

Метод интервалов: на $(-4;\ -3)$ дробь отрицательна; на $(-3;\ 1)$ дробь положительна; на $(1;\ 2)$ дробь отрицательна; на $(2;\ +\infty)$ дробь положительна; в точках $x=1$, $x=2$ числитель равен нулю.
Ответ: $(-4;\ -3)\cup[1;\ 2]$.

16 На каждом из двух заводов, если рабочие суммарно трудятся t^2 часов в неделю, за неделю выпускается t изделий. Час работы на первом заводе стоит 500 руб., на втором — 300 руб. Бюджет на оплату труда 1 200 000 руб. в неделю. Какое наибольшее число изделий можно выпустить за неделю?

Ответ: 80 изделий

Решение. $500x^2+300y^2=1\,200\,000$, максимум $x+y$ при $500x=300y$: $x=3k$, $y=5k\Rightarrow 12\,000k^2=1\,200\,000$, $k=10$. $x=30$, $y=50$, всего 80 изделий.

17 Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Прямая касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B.
а) Докажите, что угол AKB прямой.
б) Найдите площадь треугольника AKB, если радиусы окружностей равны 36 и 64.

Ответ: б) $\dfrac{55296}{25}$

Решение. а) Проведём через точку K общую касательную к окружностям; пусть она пересекает прямую AB в точке M. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны: $MA=MK$ и $MB=MK$. Значит, M — середина AB и $MK=\dfrac{AB}{2}$, то есть медиана треугольника AKB равна половине стороны AB. Поэтому $\angle AKB=90^\circ$.
б) Из прямоугольной трапеции O_1ABO_2: $AB^2=O_1O_2^2-(O_1A-O_2B)^2=(36+64)^2-(36-64)^2=4\cdot 36\cdot 64$, $AB=96$, $MA=MK=48$. Точки O_1 и M равноудалены от концов отрезка AK, поэтому $O_1M\perp AK$, и AK вдвое больше высоты прямоугольного треугольника O_1AM, проведённой из вершины A: $O_1M=\sqrt{36^2+2304}=60$, $AK=2\cdot\dfrac{O_1A\cdot AM}{O_1M}=2\cdot\dfrac{36\cdot 48}{60}=\dfrac{288}{5}$. Аналогично $BK=2\cdot\dfrac{64\cdot 48}{80}=\dfrac{384}{5}$. $S_{AKB}=\dfrac12\cdot AK\cdot BK=\dfrac{55296}{25}$.
Ответ: б) $\dfrac{55296}{25}$.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция f(x) = 2ax + |x^2−8x+7| удовлетворяет условию f(x)>1 при всех действительных x.

Ответ: a ∈ (1/2; 4+√6)

Решение. При x∈[1;7] имеем f(x)−1=−x²+(8+2a)x−8: это вогнутая парабола, её минимум на отрезке достигается на концах. Условия f(1)>1 и f(7)>1 дают a>1/2 и a>1/14; достаточно a>1/2. При x вне (1;7) имеем f(x)−1=x²+(2a−8)x+6. Если 1/2<a≤3, вершина 4−a≥1, и на луче x≤1 минимум у границы

$x=1$ положителен; на луче $x\ge 7$ функция возрастает. При $a>3$ вершина $4-a<1$, и нужен положительный минимум $6-(a-4)^2>0$. С учётом $a>3$ это $a<4+\sqrt{6}$. Получаем указанный интервал.

19 На доске записаны двузначные натуральные числа; одинаковые числа разрешены. С каждым числом выполняют ровно одно действие: либо увеличивают цифру десятков на 2 и уменьшают цифру единиц на 5, либо уменьшают цифру десятков на 2 и увеличивают цифру единиц на 2. Полученные записи тоже двузначные.

а) Может ли общая сумма увеличиться на 128?

б) Может ли исходных чисел быть 25, если сумма после действий не изменилась?

в) Сумма после действий не изменилась, а исходная сумма меньше 1198. Найдите наибольшее возможное число исходных чисел.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 44

Решение. Первое действие меняет число на $+15$; оно допустимо лишь для цифры десятков от 1 до 7 и единиц от 5 до 9. Второе меняет число на -18; исходные цифры десятков лежат от 3 до 9, единиц — от 0 до 7. Пусть первых действий x, вторых y. Общая перемена суммы равна $15x-18y$.

а) Число $15x-18y$ кратно 3, а 128 не кратно 3. Это невозможно.

б) При $x+y=25$ равенство сумм требовало бы $15x-18(25-x)=0$, то есть $33x=450$. Целого x нет.

в) Из $15x=18y$ следует $x=6k$, $y=5k$, поэтому чисел $11k$. Наименьшее число для первого действия — 15, для второго — 30. Исходная сумма не меньше $15\cdot 6k+30\cdot 5k=240k$. Из $240k<1198$ получаем $k\le 4$, то есть чисел не больше 44. Граница достигается: взять 24 экземпляра числа 15 и 20 экземпляров числа 30. После первого действия 15 превращается в 30, после второго 30 — в 12; суммы равны $960<1198$. Значит, ответ 44.