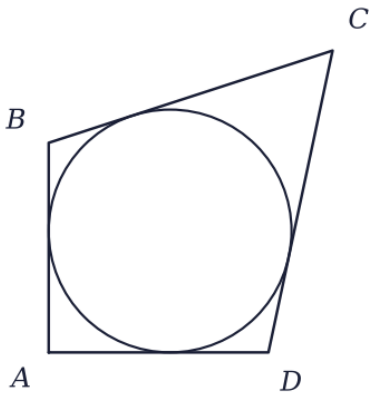
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 46, вписана окружность, $AB = 15$, $BC = 12$. Найдите CD.



Ответ: 8

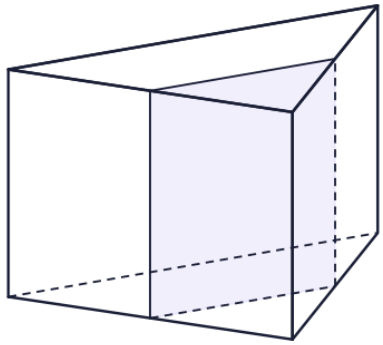
Решение. В описанном четырёхугольнике $AB + CD = BC + AD = \dfrac{P}{2} = 23$, поэтому $CD = 23 - 15 = 8$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(5;\ 2)$ и $\vec{b}\,(5;\ 4)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: 33

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 33$.

3 Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объём отсечённой треугольной призмы равен 36. Найдите объём исходной призмы.



Ответ: 144

Решение. Основание отсечённой призмы — треугольник, подобный основанию исходной с коэффициентом $\frac{1}{2}$, его площадь в 4 раза меньше. Высоты призм равны, поэтому объём исходной призмы в 4 раза больше: $4 \cdot 36 = 144$.

4 В сборнике билетов по истории всего 40 билетов, в 30 из них встречается вопрос по теме «Петровские реформы». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по этой теме.

Ответ: 0,75

Решение. $P = \frac{30}{40} = 0{,}75$.

5 Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 70% этих стёкол, вторая — 30%. Первая фабрика выпускает 4% бракованных стёкол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ: 0,031

Решение. По формуле полной вероятности: $P = 0{,}7 \cdot 0{,}04 + 0{,}3 \cdot 0{,}01 = 0{,}031$.

6 Найдите корень уравнения $\log_7(33 - x) = 1$.

Ответ: 26

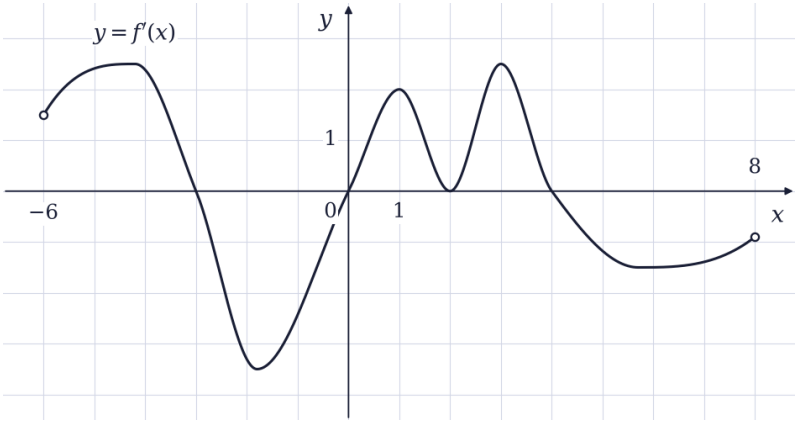
Решение. По определению логарифма $33 - x = 7^1 = 7$, откуда $x = 26$. Аргумент логарифма положителен.

7 Найдите значение выражения $3\,\mathrm{tg}\,18^\circ \cdot \mathrm{tg}\,108^\circ$.

Ответ: -3

Решение. $\operatorname{tg} 108^\circ = -\operatorname{ctg} 18^\circ$, а $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, поэтому выражение равно -3.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6;\ 8)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 3

Решение. Точки экстремума — нули производной, в которых она меняет знак: $-3;\ 0;\ 4$. В точке 2 график f' касается оси абсцисс без смены знака, это не экстремум. Всего 3.

9 Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 18$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 6$ м/с². За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 15 метров. Ответ дайте в секундах.

Ответ: 1

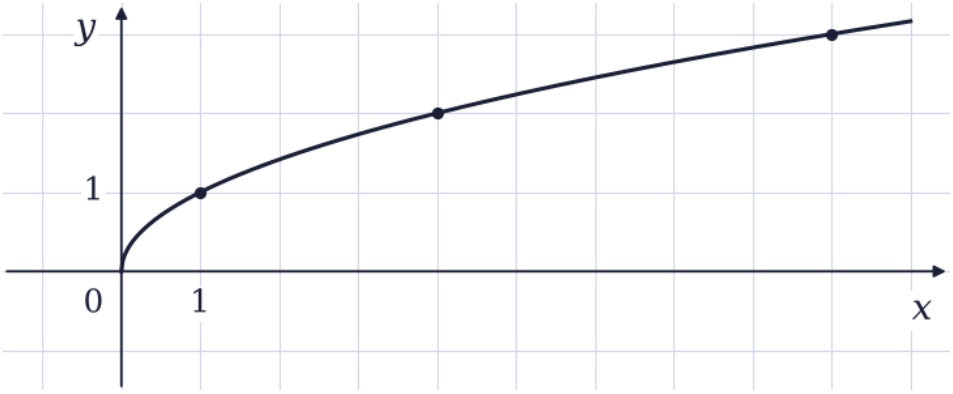
Решение. $18t - \dfrac{6t^2}{2} = 15 \iff t^2 - 6t + 5 = 0$. Корни: $t = 1$ и $t = 5$. Торможение длится $\dfrac{v_0}{a} = 3$ с, поэтому подходит $t = 1$.

10 Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 96 литров она заполняет на 8 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: 4

Решение. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{96}{x} - \dfrac{96}{x+2} = 8$, положительный корень $x = 4$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(144)$.



Ответ: 12

Решение. График проходит через точку $(9;\ 3)$: $3 = k\sqrt{9}$, $k = 1$. $f(144) = 1 \cdot \sqrt{144} = 12$.

12 Найдите точку максимума функции y = 6ln x − x + 91.

Ответ: 6

Решение. Область определения: x > 0. Производная y′ = 6/x − 1. Она положительна при 0 < x < 6 и отрицательна при x > 6. Точка максимума x = 6.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $2\cos^2 x + \sin(\pi - x) = -1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$**; б)** $\dfrac{3\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\sin(\pi - x) = \sin x$, а $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$2\left(1 - \sin^2 x\right) + \sin x = -1 \iff 2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0.$$

Отсюда $\sin x = -1$ или $\sin x = 1{,}5$. Уравнение $\sin x = 1{,}5$ корней не имеет, так как $|1{,}5| > 1$. Если $\sin x = -1$, то $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$\dfrac{\pi}{2} \leqslant -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant 2\pi \iff \dfrac{1}{2} \leqslant k \leqslant \dfrac{5}{4}$, $k \in \{1\}$: $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{3\pi}{2}$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 16 на ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 3 : 1$.

а) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости ACC_1.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью BDM.

Ответ: б) $32\sqrt{34}$

Решение. а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD \perp AC$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1 \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, значит, $BD \perp (ACC_1)$. Плоскость BDM проходит через прямую BD, перпендикулярную плоскости ACC_1, поэтому плоскости BDM и ACC_1 перпендикулярны.

б) Точка M лежит на ребре CC_1, поэтому плоскость BDM пересекает грани куба по отрезкам BD, BM и DM, и сечение — треугольник BDM. Пусть O — центр квадрата $ABCD$; прямая OM лежит в плоскости ACC_1, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$, и OM — высота треугольника BDM. $OC = \dfrac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$, $CM = 12$, $OM = \sqrt{OC^2 + CM^2} = \sqrt{128 + 144} = 4\sqrt{17}$, $BD = 16\sqrt{2}$. $S_{BDM} = \dfrac{1}{2} \cdot 16\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{17} = 32\sqrt{34}$.

Ответ: б) $32\sqrt{34}$.

15 Решите неравенство

$$\frac{9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27}{\log_5(x+1)} \leqslant 0.$$

Ответ: $(-1;\,0) \cup [1;\,2]$

Решение. Область допустимых значений: $x + 1 > 0$ и $\log_5(x+1) \neq 0$, то есть $x > -1$, $x \neq 0$.

$4 \cdot 3^{x+1} = 12 \cdot 3^x$, числитель раскладывается на множители: $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = (3^x - 3)(3^x - 9)$.

Функции $y = 3^t$ и $y = \log_5 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак $3^x - 3$ совпадает со знаком $x - 1$, знак $3^x - 9$ — со знаком $x - 2$, знак $\log_5(x+1) = \log_5(x+1) - \log_5 1$ — со знаком x. Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x} \leqslant 0, \quad x > -1.$$

Метод интервалов: на $(-1;\,0)$ дробь отрицательна; на $(0;\,1)$ дробь положительна; на $(1;\,2)$ дробь отрицательна; на $(2;\,+\infty)$ дробь положительна; в точках $x = 1$, $x = 2$ числитель равен нулю.

Ответ: $(-1;\,0) \cup [1;\,2]$.

16 Кредит взят на 2 года под 25 % (стандартная схема). Первый платёж 1,5 млн руб., второй 2,5 млн руб. — кредит погашен. Найдите сумму кредита.
Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 2 800 000 руб.

Решение. $S \cdot 1{,}25^2 = 1{,}5 \cdot 1{,}25 + 2{,}5 = 4{,}375 \Rightarrow S = 4{,}375 : 1{,}5625 = 2{,}8$ млн руб.

17 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ACH и BCH соответственно.
а) Докажите, что $O_1O_2 = r\sqrt{2}$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.
б) Найдите O_1O_2, если $AC = 45$, $BC = 24$.

Ответ: б) $9\sqrt{2}$

Решение. а) Треугольники ACH и ABC подобны (прямоугольные, с общим острым углом A), коэффициент подобия $\dfrac{AC}{AB}$; треугольники BCH и ABC подобны с коэффициентом $\dfrac{BC}{AB}$.
Поэтому радиусы вписанных окружностей равны $r_1 = r \cdot \dfrac{AC}{AB}$ и $r_2 = r \cdot \dfrac{BC}{AB}$.
Центр вписанной окружности лежит на биссектрисе угла, поэтому HO_1 и HO_2 — биссектрисы прямых углов AHC и BHC: $\angle O_1HC = \angle O_2HC = 45^\circ$, $\angle O_1HO_2 = 90^\circ$. Расстояние от O_1 до сторон угла AHC равно r_1, поэтому $HO_1 = r_1\sqrt{2}$; аналогично $HO_2 = r_2\sqrt{2}$.
По теореме Пифагора $O_1O_2^2 = 2r_1^2 + 2r_2^2 = 2r^2 \cdot \dfrac{AC^2 + BC^2}{AB^2} = 2r^2$, то есть $O_1O_2 = r\sqrt{2}$.
б) $AB = \sqrt{45^2 + 24^2} = 51$. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник: $r = \dfrac{AC + BC - AB}{2} = \dfrac{45 + 24 - 51}{2} = 9$. По пункту а) $O_1O_2 = 9\sqrt{2}$.
Ответ: б) $9\sqrt{2}$.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\ln(4x-1)\cdot\sqrt{(x^2-6x+6a-a^2)} = 0$ имеет ровно один корень на [0; 1].

Ответ: a ∈ (1/4; 1/2] ∪ (1; 5) ∪ [11/2; 23/4)

Решение. Область определения: $x>1/4$ и $Q(x)=x^2-6x+6a-a^2\ge 0$. Корень логарифма $x=1/2$ допустим при $Q(1/2)\ge 0$, то есть $a\in[1/2;11/2]$. Корни Q равны a и 6−a. На (1/4;1] первый допустим при $a\in(1/4;1]$, второй при $a\in[5;23/4)$. Совпадения с 1/2 возникают при a=1/2 и a=11/2. При $1/4<a<1/2$ имеется только x=a; при a=1/2 этот корень совпадает с логарифмическим; при $1/2<a\le 1$ имеются два. При $1<a<5$ есть только x=1/2; при $5\le a<11/2$ их два; при a=11/2 корни совпадают; при $11/2<a<23/4$ есть только x=6−a. На остальных промежутках корней нет.

19 На доске написано 9 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое пяти наименьших из них равно 5, среднее арифметическое пяти наибольших равно 13.

а) Может ли наибольшее из этих чисел равняться 40?

б) Может ли среднее арифметическое всех чисел равняться 9?

в) Найдите наименьшее возможное значение среднего арифметического всех чисел.

Ответ: а) нет; б) да, например $1, 2, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 23$**; в)** $\dfrac{79}{9}$

Решение. $a_1 < \ldots < a_9$, $a_1 + \ldots + a_5 = 25$, $a_5 + \ldots + a_9 = 65$, сумма всех $90 - a_5$. Из $25 - a_5 \le (a_5 - 1) + \ldots + (a_5 - 4) = 4a_5 - 10$ получаем $a_5 \ge 7$. а) $a_9 = 65 - a_5 - a_6 - a_7 - a_8 \le 65 - a_5 - (3a_5 + 6) = 59 - 4a_5 \le 31$. б) Нужно $a_5 = 9$; пример проверяется: $1 + 2 + 5 + 8 + 9 = 25$, $9 + 10 + 11 + 12 + 23 = 65$. в) Из $65 - a_5 \ge (a_5 + 1) + \ldots + (a_5 + 4) = 4a_5 + 10$ получаем $a_5 \le 11$, сумма не меньше 79. Пример: $1, 2, 3, 8, 11, 12, 13, 14, 15$.