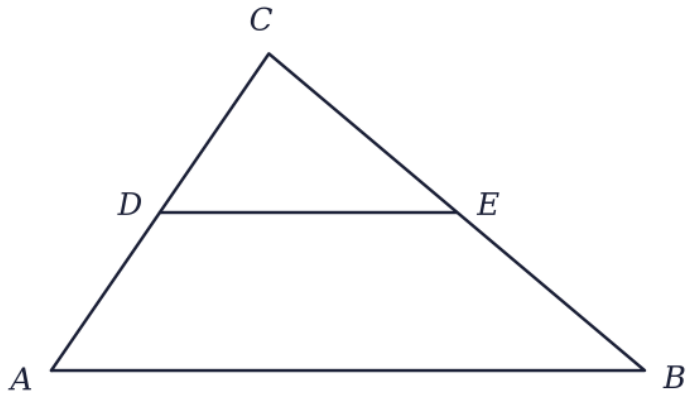
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 Площадь треугольника ABC равна 32, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



Ответ: 24

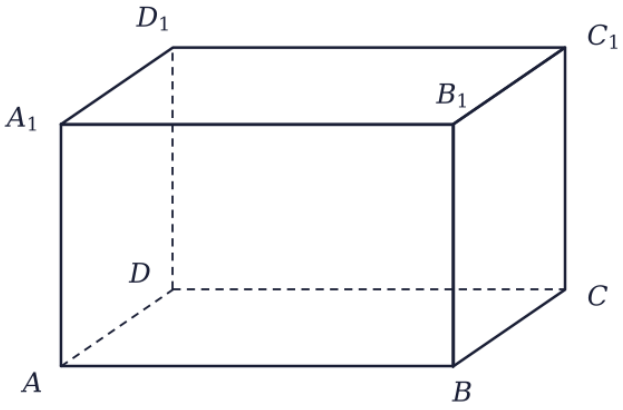
Решение. Треугольник CDE подобен треугольнику CAB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, его площадь $\frac{32}{4} = 8$. Площадь трапеции: $32 - 8 = 24$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(5;\ 4)$ и $\vec{b}\,(-5;\ 5)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: -5

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot (-5) + 4 \cdot 5 = -5$.

3 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 1$, $BC = 2$, $AA_1 = 2$. Найдите длину диагонали AC_1.



Ответ: 3

Решение. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений: $AC_1 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$.

4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют 7 спортсменов из Финляндии, 5 спортсменов из Дании и 12 спортсменов из Швеции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Ответ: 0,5

Решение. Всего спортсменов $7 + 5 + 12 = 24$, $P = \dfrac{12}{24} = 0{,}5$.

5 Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,2, второго — 0,4. Найдите вероятность того, что в мишень попадёт ровно один стрелок.

Ответ: 0,44

Решение. Ровно одно попадание: первый попал, второй нет, или наоборот. $P = 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}44$.

6 Найдите корень уравнения $\log_4(39 - x) = 1$.

Ответ: 35

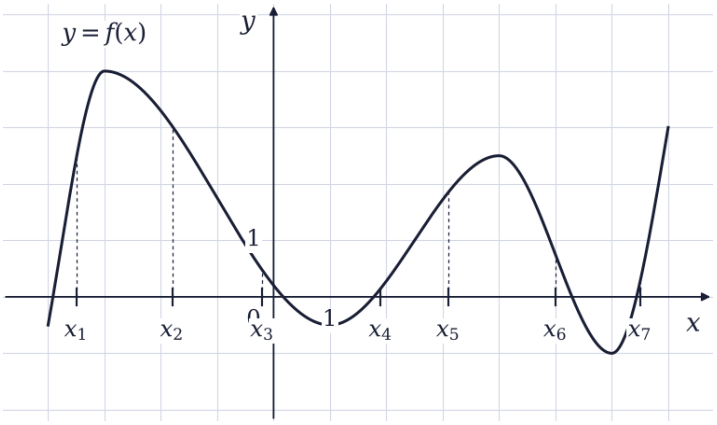
Решение. По определению логарифма $39 - x = 4^1 = 4$, откуда $x = 35$. Аргумент логарифма положителен.

7 Найдите значение выражения $\log_{0{,}8} 20 - \log_{0{,}8} 25$.

Ответ: 1

Решение. $\log_{0,8} 20 - \log_{0,8} 25 = \log_{0,8} \dfrac{20}{25} = \log_{0,8} 0{,}8 = 1.$

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечено 7 точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Ответ: 3

Решение. Производная отрицательна в тех точках, где функция убывает. По графику таких точек 3.

9 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 4 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}2$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 9,6 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: 8

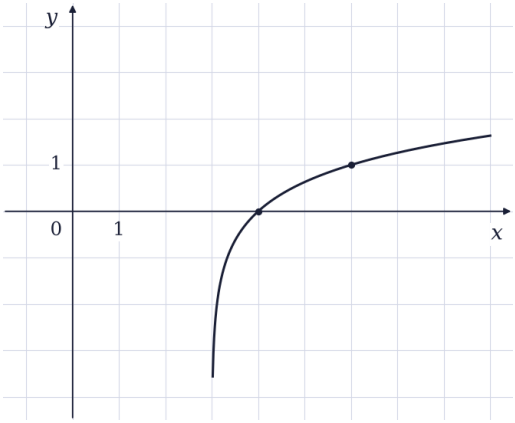
Решение. $RC = 4 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 8.$ $9{,}6 = 1{,}2 \cdot 8 \cdot \log_2 \dfrac{16}{U}$, откуда $\log_2 \dfrac{16}{U} = 1, U = \dfrac{16}{2} = 8.$

10 Катер прошёл 57 км против течения реки и 10 км по течению, затратив на весь путь 7 часов. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 12

Решение. $\dfrac{57}{v-3} + \dfrac{10}{v+3} = 7$. Домножив на $(v-3)(v+3)$, получим квадратное уравнение, положительный корень которого больше 3: $v = 12$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x + b)$. Найдите $f(30)$.



Ответ: 3

Решение. $\log_a(x + b) = 0$ при $x + b = 1$; график пересекает ось абсцисс в точке $x = 4$, поэтому $b = -3$. По точке $(6;\ 1)$ находим $a = 3$. $f(30) = \log_3 27 = 3$.

12 Найдите точку максимума функции $y = x^2 e^{6 - x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

Ответ: 2

Решение. Производная $y' = e^{6 - x}x(2 - x)$. При $0 < x < 2$ она положительна, при $x > 2$ отрицательна. Значит, точка максимума $x = 2$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x - 8\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 7$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$**; б)** $\frac{\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$, а $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

Уравнение принимает вид

$$\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 8\sin x = 7 \iff \sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0.$$

Отсюда $\sin x = 1$ или $\sin x = 3$. Уравнение $\sin x = 3$ корней не имеет, так как $|3| > 1$.
Если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после

деления на π получаем неравенства для k).

$-\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant \dfrac{\pi}{2} \iff -\dfrac{3}{4} \leqslant k \leqslant 0$, $k \in \{0\}$: $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{\pi}{2}$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 5, боковое ребро равно 10.

а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости SAC.

б) Найдите угол между прямой SB и плоскостью SAC.

Ответ: б) $\arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Решение. а) Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Диагонали квадрата перпендикулярны: $BD \perp AC$. Пирамида правильная, поэтому её высота — отрезок SO, и $SO \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и SO плоскости SAC, значит, $BD \perp (SAC)$.

б) По пункту а) $BO \perp (SAC)$, поэтому SO — проекция прямой SB на плоскость SAC, и искомый угол равен $\angle BSO$. В прямоугольном треугольнике BSO: $BO = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, $SB = 10$, $\sin \angle BSO = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: б) $\arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

15 Решите неравенство

$$\frac{4^x - 5 \cdot 2^x + 4}{\log_3(x+4)} \geqslant 0.$$

Ответ: $(-3;\ 0] \cup [2;\ +\infty)$

Решение. Область допустимых значений: $x + 4 > 0$ и $\log_3(x+4) \neq 0$, то есть $x > -4$, $x \neq -3$.

Числитель раскладывается на множители: $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = (2^x - 1)(2^x - 4)$.

Функции $y = 2^t$ и $y = \log_3 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак $2^x - 1$ совпадает со знаком x, знак $2^x - 4$ — со знаком $x - 2$, знак $\log_3(x+4) = \log_3(x+4) - \log_3 1$ — со знаком $x + 3$. Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{x(x-2)}{x+3} \geqslant 0, \quad x > -4.$$

Метод интервалов: на $(-4;\ -3)$ дробь отрицательна; на $(-3;\ 0)$ дробь положительна; на $(0;\ 2)$ дробь отрицательна; на $(2;\ +\infty)$ дробь положительна; в точках $x = 0$, $x = 2$ числитель равен нулю.

Ответ: $(-3;\ 0] \cup [2;\ +\infty)$.

16 Кредит 4 млн руб. на 3 года под 20 % (стандартная схема). Каждый июль долг вдвое меньше прошлогоднего, а в третий год гасится полностью. Найдите общую сумму выплат.

Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 5 400 000 руб.

Решение. Долги под проценты: S, $S/2$, $S/4$ (сумма $1{,}75S$). $\Sigma = 4(1 + 0{,}2 \cdot 1{,}75) = 5{,}4$ млн руб.

17 Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Прямая касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B.

а) Докажите, что угол AKB прямой.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если радиусы окружностей равны 32 и 18.

Ответ: б) $\dfrac{13824}{25}$

Решение. а) Проведём через точку K общую касательную к окружностям; пусть она пересекает прямую AB в точке M. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны: $MA = MK$ и $MB = MK$. Значит, M — середина AB и $MK = \dfrac{AB}{2}$, то есть медиана треугольника AKB равна половине стороны AB. Поэтому $\angle AKB = 90^\circ$.

б) Из прямоугольной трапеции O_1ABO_2: $AB^2 = O_1O_2^2 - (O_1A - O_2B)^2 = (32+18)^2 - (32-18)^2 = 4 \cdot 32 \cdot 18$, $AB = 48$, $MA = MK = 24$. Точки O_1 и M равноудалены от концов отрезка AK, поэтому $O_1M \perp AK$, и AK вдвое больше высоты прямоугольного треугольника O_1AM, проведённой из вершины A: $O_1M = \sqrt{32^2 + 576} = 40$, $AK = 2 \cdot \dfrac{O_1A \cdot AM}{O_1M} = 2 \cdot \dfrac{32 \cdot 24}{40} = \dfrac{192}{5}$. Аналогично $BK = 2 \cdot \dfrac{18 \cdot 24}{30} = \dfrac{144}{5}$. $S_{AKB} = \dfrac{1}{2} \cdot AK \cdot BK = \dfrac{13824}{25}$.

Ответ: б) $\dfrac{13824}{25}$.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение a|x−4| = 3/(x+2) имеет ровно два корня на [0; +∞).

Ответ: a ∈ {1/3} ∪ (3/8; +∞)

Решение. Правая часть положительна, поэтому a>0 и x≠4. Запишем a=h(x)=3/((x+2)|x−4|). На [0;4) функция сначала убывает от h(0)=3/8 до h(1)=1/3, затем возрастает до бесконечности: (x+2)(4−x)=9−(x−1)². Здесь один корень при a=1/3 и при a>3/8, два корня при 1/3<a≤3/8, ни одного при a<1/3. На (4;+∞) функция строго убывает от бесконечности до нуля и всегда даёт ровно один корень при a>0. Итого два корня при a=1/3 или a>3/8.

19 На доске написано 10 различных натуральных чисел, их среднее арифметическое равно 12.

а) Может ли наибольшее из этих чисел равняться 50?

б) Может ли наименьшее из этих чисел равняться 8?

в) Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих чисел.

Ответ: а) да, например $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 34, 50$**; б) нет; в)** 75

Решение. Сумма чисел равна 120. а) $1 + 2 + \ldots + 8 + 34 + 50 = 36 + 84 = 120$. б) Десять различных чисел, не меньших 8, дают сумму не меньше $8 + 9 + \ldots + 17 = 125 > 120$. в) Девять остальных различных чисел дают сумму не меньше $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$, поэтому наибольшее не больше $120 - 45 = 75$. Пример: $1, 2, \ldots, 9, 75$.