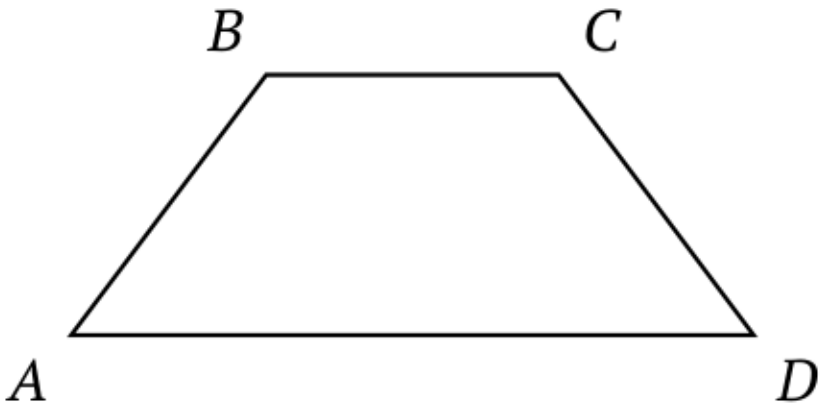
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 21 и 9 соответственно, а боковая сторона равна 10. Найдите площадь трапеции.



Ответ: 120

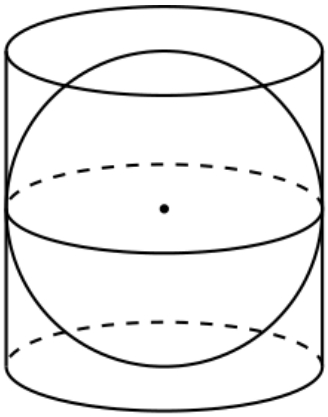
Решение. Проекция боковой стороны на большее основание равна $\dfrac{21-9}{2}=6$, высота $h=\sqrt{10^2-6^2}=8$, $S=\dfrac{21+9}{2}\cdot 8=120$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(4;\ 1)$ и $\vec{b}\,(-2;\ 6)$. Найдите длину вектора $2\vec{a}+\vec{b}$.

Ответ: 10

Решение. $2\vec{a}+\vec{b}=(8-2;\ 2+6)=(6;\ 8)$, $|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{36+64}=10$.

3 В цилиндр вписан шар: шар касается обоих оснований цилиндра и его боковой поверхности. Площадь полной поверхности цилиндра равна 54. Найдите площадь поверхности шара.



Ответ: 36

Решение. Высота цилиндра равна диаметру шара: $h = 2r$. $S_{\text{цил}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2 = 54$, откуда $\pi r^2 = 9$; $S_{\text{шара}} = 4\pi r^2 = 36$.

4 В коробке лежат 24 одинаковых на вид чайных пакетика: 9 пакетиков с зелёным чаем, 6 — с белым, остальные — с чёрным. Найдите вероятность того, что случайно выбранный пакетик окажется с чёрным чаем.

Ответ: 0,375

Решение. Пакетиков с чёрным чаем $24 - 9 - 6 = 9$; $P = \dfrac{9}{24} = 0{,}375$.

5 Камера на въезде в паркинг автоматически распознаёт номера автомобилей. Номер автомобиля оказывается чистым с вероятностью 0,85; чистый номер камера распознаёт с вероятностью 0,98. Загрязнённый номер камера распознаёт с вероятностью 0,6. Найдите вероятность того, что номер случайно выбранного въезжающего автомобиля будет распознан.

Ответ: 0,923

Решение. По формуле полной вероятности: $0{,}85 \cdot 0{,}98 + 0{,}15 \cdot 0{,}6 = 0{,}833 + 0{,}09 = 0{,}923$.

6 Найдите корень уравнения $\log_3(2x + 5) = \log_3(x - 1) + 2$.

Ответ: 2

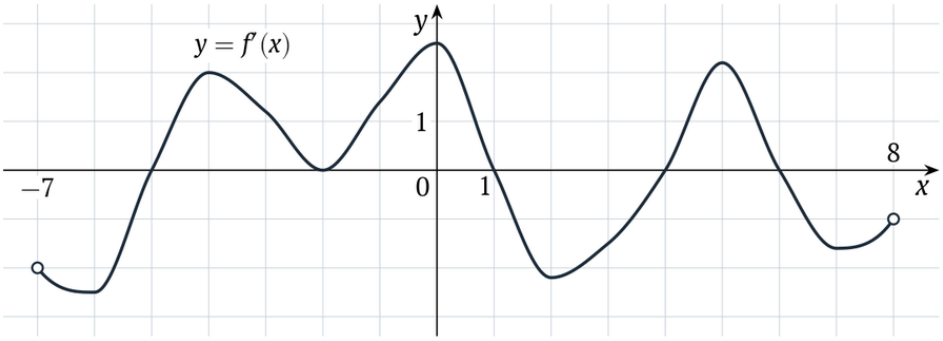
Решение. $2 = \log_3 9$, поэтому $2x + 5 = 9(x - 1)$, $x = 2$; при $x = 2$ оба аргумента логарифмов положительны.

7 Найдите значение выражения $\dfrac{\log_3 64}{\log_3 4} + 5^{\log_{25} 49}$.

Ответ: 10

Решение. $\dfrac{\log_3 64}{\log_3 4} = \log_4 64 = 3$; $5^{\log_{25} 49} = 5^{\log_5 7} = 7$; сумма равна 10.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7;\ 8)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6;\ 7]$.



Ответ: 4

Решение. f' меняет знак в точках -5 (с «−» на «+»), 1, 4, 6; в точке -2 график f' касается оси абсцисс без смены знака, это не экстремум. Всего 4 точки.

9 Масса радиоактивного изотопа в образце уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа (в мг), t — время (в минутах), прошедшее от начального момента, T — период полураспада (в минутах). В начальный момент масса изотопа $m_0 = 160$ мг, период его полураспада $T = 12$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг?

Ответ: 60

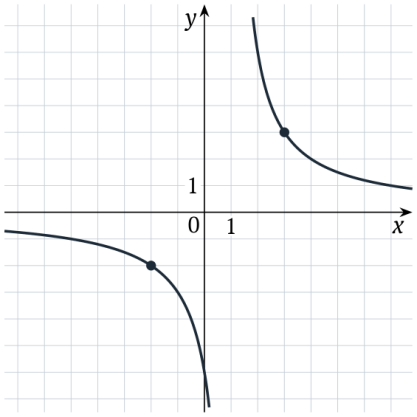
Решение. $160 \cdot 2^{-t/12} = 5 \iff 2^{-t/12} = 2^{-5} \iff t = 60$.

10 Катер прошёл 36 км против течения реки и 22 км по течению, затратив на весь путь 3 часа. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 20

Решение. $\dfrac{36}{v-2} + \dfrac{22}{v+2} = 3 \iff 3v^2 - 58v - 40 = 0$, $v = 20$ (второй корень отрицателен).

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \dfrac{k}{x+a}$. Найдите значение $f(-11)$.



Ответ: -0,5

Решение. По точкам $(3;\ 3)$ и $(-2;\ -2)$: $k = 3(3+a) = -2(-2+a)$, откуда $a = -1$, $k = 6$. $f(-11) = \dfrac{6}{-12} = -0{,}5$.

12 Найдите наименьшее значение функции y = x + 36/x + 85 на отрезке [3; 18].

Ответ: 97

Решение. На отрезке x > 0. Производная y′ = 1 − 36/x^2 отрицательна при x < 6 и положительна при x > 6. Минимум достигается при x = 6; y(6) = 6 + 6 + 85 = 97.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $2\cos^2 x - 3\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = 3$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m;\ k, n, m \in \mathbb{Z}$**; б)** $-\dfrac{17\pi}{6};\ -\dfrac{5\pi}{2};\ -\dfrac{13\pi}{6}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$, а $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Уравнение принимает вид

$$2 - 2\sin^2 x - 3\sin x = 3 \iff 2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0 \iff (\sin x + 1)(2\sin x + 1) = 0.$$

Если $\sin x=-1$, то $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Если $\sin x=-\dfrac{1}{2}$, то $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни из отрезка $\left[-\dfrac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$ с помощью двойных неравенств.

$-\dfrac{7}{2}\leqslant -\dfrac{1}{2}+2k\leqslant -2 \iff -\dfrac{3}{2}\leqslant k\leqslant -\dfrac{3}{4} \iff k=-1$: $x=-\dfrac{5\pi}{2}$;

$-\dfrac{7}{2}\leqslant -\dfrac{1}{6}+2n\leqslant -2 \iff -\dfrac{5}{3}\leqslant n\leqslant -\dfrac{11}{12} \iff n=-1$: $x=-\dfrac{13\pi}{6}$;

$-\dfrac{7}{2}\leqslant -\dfrac{5}{6}+2m\leqslant -2 \iff -\dfrac{4}{3}\leqslant m\leqslant -\dfrac{7}{12} \iff m=-1$: $x=-\dfrac{17\pi}{6}$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{17\pi}{6};\ -\dfrac{5\pi}{2};\ -\dfrac{13\pi}{6}$.

Типичная потеря балла: из-за путаницы знаков при решении $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ записывают серию $x=-\dfrac{7\pi}{6}+2\pi m$; она даёт «лишний» корень $-\dfrac{19\pi}{6}$.

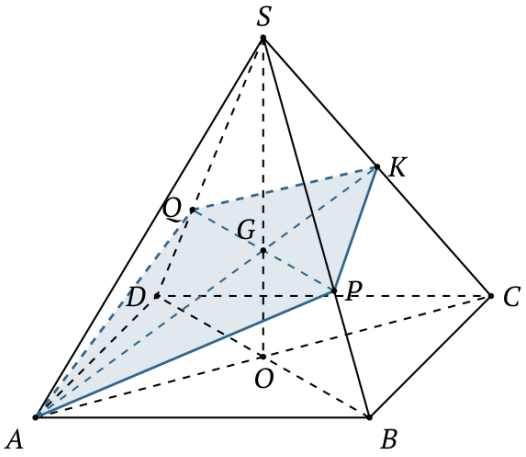
14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 6. Точка K — середина ребра SC. Плоскость α проходит через точки A и K параллельно прямой BD.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро SB в отношении $2:1$, считая от вершины S.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α.

Ответ: б) $6\sqrt{10}$

Решение.



а) Пусть O — центр квадрата $ABCD$; тогда SO — высота пирамиды, O — середина AC и BD. В треугольнике SAC отрезки AK и SO — медианы; пусть G — точка их пересечения. По свойству медиан $SG:GO=2:1$.

Прямая BD параллельна плоскости α и лежит в плоскости SBD; точка G лежит в обеих плоскостях. Следовательно, α пересекает плоскость SBD по прямой, проходящей через G

параллельно BD. Пусть эта прямая пересекает рёбра SB и SD в точках P и Q.
Так как $PQ \parallel BD$, по теореме о пропорциональных отрезках $SP : PB = SG : GO = 2 : 1$, что и требовалось доказать.
б) Сечение — четырёхугольник $APKQ$, его диагонали AK и PQ пересекаются в точке G.
Прямая BD перпендикулярна AC (диагонали квадрата) и SO (высота), значит, $BD \perp (SAC)$.
Поскольку $PQ \parallel BD$, получаем $PQ \perp AK$. Площадь четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями равна половине их произведения.
Треугольники SPQ и SBD подобны с коэффициентом $\frac{2}{3}$, поэтому $PQ = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3} \cdot 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.
В треугольнике SAC: $SA = SC = 6$, $AC = 6\sqrt{2}$, $SA^2 + SC^2 = 72 = AC^2$, значит, $\angle ASC = 90^\circ$ и $AK = \sqrt{SA^2 + SK^2} = \sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5}$.
$S_{APKQ} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2} = 6\sqrt{10}$.
Ответ: б) $6\sqrt{10}$.

15 Решите неравенство

$$\frac{4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8}{\log_3(x+2)} \geqslant 0.$$

Ответ: $(-1;\ 1] \cup [2;\ +\infty)$

Решение. Область допустимых значений: $x + 2 > 0$ и $\log_3(x+2) \neq 0$, то есть $x > -2$, $x \neq -1$.
Числитель раскладывается на множители: $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = (2^x - 2)(2^x - 4)$.
Функции $y = 2^t$ и $y = \log_3 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак $2^x - 2$ совпадает со знаком $x - 1$, знак $2^x - 4$ — со знаком $x - 2$, знак $\log_3(x+2) = \log_3(x+2) - \log_3 1$ — со знаком $x + 1$. Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x+1} \geqslant 0, \quad x > -2.$$

Метод интервалов: на $(-2;\ -1)$ дробь отрицательна; на $(-1;\ 1]$ неотрицательна; на $(1;\ 2)$ отрицательна; на $[2;\ +\infty)$ неотрицательна.
Ответ: $(-1;\ 1] \cup [2;\ +\infty)$.
Типичная потеря балла: включение промежутка $(-2;\ -1)$ из-за неучтённого знака знаменателя или включение $x = -1$.

16 В июле 2027 года планируется взять кредит в банке на пять лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2032 года кредит должен быть полностью погашен.

Сколько рублей планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1 690 000 рублей?

Ответ: 1 300 000

Решение. Долг ежегодно уменьшается на $\frac{S}{5}$; проценты за 5 лет: $0{,}1S\left(1+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)=0{,}3S$. Сумма выплат $1{,}3S=1\,690\,000$, $S=1\,300\,000$.

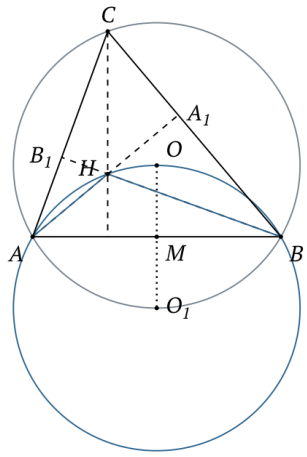
17 Точка H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC.

а) Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и AHB, равны.

б) Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если $AB=12$ и $\angle ACB=60^\circ$.

Ответ: б) $4\sqrt{3}$

Решение.



а) Пусть $\gamma=\angle ACB$, AA_1 и BB_1 — высоты. Треугольник остроугольный, поэтому H лежит внутри него и на отрезках AA_1, BB_1. В четырёхугольнике CA_1HB_1 углы при вершинах A_1 и B_1 прямые, значит, $\angle A_1HB_1=180^\circ-\gamma$. Углы AHB и A_1HB_1 вертикальные, поэтому $\angle AHB=180^\circ-\gamma$.

По теореме синусов радиус окружности, описанной около треугольника AHB, равен

$$R_1 = \frac{AB}{2\sin(180^\circ - \gamma)} = \frac{AB}{2\sin\gamma} = R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

б) $R = R_1 = \dfrac{12}{2\sin 60^\circ} = 4\sqrt{3}$. Обе окружности проходят через A и B, поэтому их центры O и O_1 лежат на серединном перпендикуляре к AB. Пусть M — середина AB. Тогда $OM = O_1M = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{48 - 36} = 2\sqrt{3}$.

Вписанный угол $ACB = 60^\circ$ острый, поэтому точки C и O лежат по одну сторону от прямой AB. Вписанный угол $AHB = 120^\circ$ тупой, поэтому точки H и O_1 лежат по разные стороны от AB. Точка H лежит внутри треугольника, то есть по ту же сторону от AB, что и C.

Следовательно, O и O_1 находятся по разные стороны от AB и $OO_1 = OM + MO_1 = 4\sqrt{3}$.

Ответ: б) $4\sqrt{3}$.

Типичная потеря балла: ответ 0 или $OO_1 = |OM - O_1M|$ без анализа расположения центров относительно AB; такое решение в пункте б) не считается обоснованным.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - 2x - 3| = x + a$$

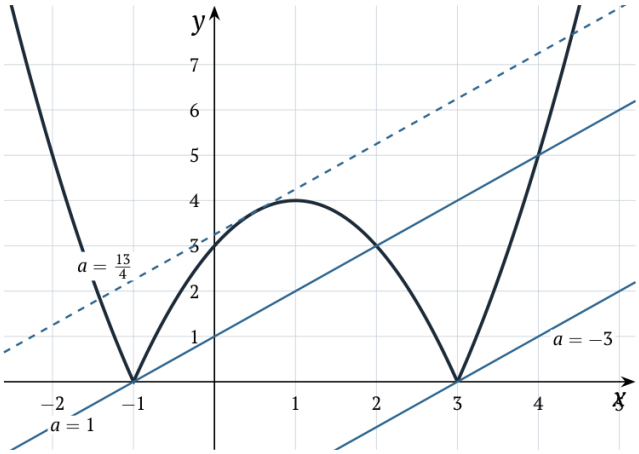
имеет ровно два различных корня.

Ответ: $a \in (-3;\ 1) \cup \left(\dfrac{13}{4};\ +\infty\right)$

Решение. Число корней уравнения равно числу общих точек графика $y = |x^2 - 2x - 3|$ и прямой $y = x + a$ (угловой коэффициент 1). Поскольку $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, график состоит из частей параболы $y = x^2 - 2x - 3$ при $x \leqslant -1$ и при $x \geqslant 3$ и дуги $y = -x^2 + 2x + 3$ при $-1 < x < 3$.

Крайние ветви. $x^2 - 2x - 3 = x + a \iff x^2 - 3x - (3 + a) = 0$, корни $x_{1,2} = \dfrac{3 \mp \sqrt{21 + 4a}}{2}$ при $a \geqslant -\dfrac{21}{4}$. Больший корень удовлетворяет условию $x \geqslant 3$ при $\sqrt{21 + 4a} \geqslant 3$, то есть при $a \geqslant -3$; меньший корень удовлетворяет условию $x \leqslant -1$ при $\sqrt{21 + 4a} \geqslant 5$, то есть при $a \geqslant 1$. (Касание прямой с параболой при $a = -\dfrac{21}{4}$ происходит в точке $x = \dfrac{3}{2}$, не принадлежащей крайним ветвям.)

Дуга. $-x^2 + 2x + 3 = x + a \iff x^2 - x + a - 3 = 0$, корни $x_{3,4} = \dfrac{1 \mp \sqrt{13 - 4a}}{2}$ при $a \leqslant \dfrac{13}{4}$; при $a = \dfrac{13}{4}$ прямая касается дуги в точке $x = \dfrac{1}{2} \in (-1;\ 3)$. Больший корень лежит в $(-1;\ 3)$ при $\sqrt{13 - 4a} < 5$, то есть при $a > -3$; меньший корень лежит в $(-1;\ 3)$ при $\sqrt{13 - 4a} < 3$, то есть при $a > 1$.



Итог подсчёта различных корней:

a	$a < -3$	-3	$(-3;\ 1)$	1	$\left(1;\ \frac{13}{4}\right)$	$\frac{13}{4}$	$a > \frac{13}{4}$
корней	0	1	2	3	4	3	2

При $a = -3$ корень $x = 3$ общий для ветви и дуги; при $a = 1$ корень $x = -1$ общий для ветви и дуги, остальные корни 2 и 4. Ровно два корня получаются при $a \in (-3;\ 1) \cup \left(\frac{13}{4};\ +\infty\right)$.

Ответ: $a \in (-3;\ 1) \cup \left(\frac{13}{4};\ +\infty\right)$.

19 На доске написано несколько (не менее трёх) различных натуральных чисел. Их среднее арифметическое равно 30. Если стереть с доски наибольшее из этих чисел, то среднее арифметическое оставшихся чисел окажется равным 27. Если же в исходном наборе стереть наименьшее из написанных чисел, то среднее арифметическое оставшихся чисел окажется равным 31.

а) Может ли наименьшее из написанных чисел быть равным 10?

б) Может ли наибольшее из написанных чисел быть равным 100?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6

Решение. Пусть на доске $n \geqslant 3$ чисел, их сумма $30n$, наибольшее число M, наименьшее m. Из условия

$$\frac{30n - M}{n-1} = 27 \Rightarrow M = 3n + 27, \qquad \frac{30n - m}{n-1} = 31 \Rightarrow m = 31 - n.$$

Сумма остальных $n-2$ чисел равна $30n - M - m = 28n - 58$.

а) Если $m = 10$, то $n = 21$, $M = 90$. Пример: $10, 11, 12, \ldots, 26, 57, 88, 89, 90$ (21 число). Сумма равна $10 + \dfrac{(11+26)\cdot 16}{2} + 57 + 88 + 89 + 90 = 630 = 21 \cdot 30$; без числа 90 среднее $\dfrac{540}{20} = 27$; без числа 10 среднее $\dfrac{620}{20} = 31$. Ответ: да.

б) Если $M = 100$, то $3n + 27 = 100$, $3n = 73$, что невозможно при натуральном n. Ответ: нет.

в) Остальные $n-2$ чисел различны и больше $m = 31 - n$, поэтому их сумма не меньше суммы чисел $32 - n,\ 33 - n,\ \ldots,\ 29$:

$$28n - 58 \geqslant \frac{(n-2)(61-n)}{2} \iff 56n - 116 \geqslant -n^2 + 63n - 122 \iff n^2 - 7n + 6 \geqslant 0$$

При $n \geqslant 3$ отсюда следует $n \geqslant 6$. Пример для $n = 6$: числа $25, 26, 27, 28, 29, 45$. Сумма $180 = 6 \cdot 30$; без 45 среднее $\dfrac{135}{5} = 27$; без 25 среднее $\dfrac{155}{5} = 31$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

Для проверяющего: в пункте в) обоснование состоит из двух частей — оценки $n \geqslant 6$ и примера для $n = 6$; пример без оценки или оценка без примера пункт в) не закрывают.