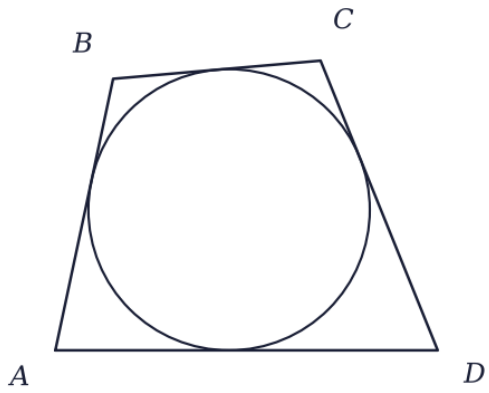
## Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

**1** В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 66, вписана окружность, $AB = 18$, $BC = 16$. Найдите $CD$.




**Ответ: 15**

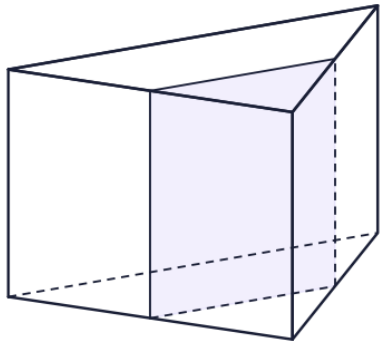
**Решение.** В описанном четырёхугольнике $AB + CD = BC + AD = \dfrac{P}{2} = 33$, поэтому $CD = 33 - 18 = 15$.

**2** Даны векторы $\vec{a}\,(-4;\ -5)$ и $\vec{b}\,(-3;\ 2)$. Найдите длину вектора $4\vec{a} - 2\vec{b}$.

**Ответ: 26**

**Решение.** $4\vec{a} - 2\vec{b} = (-10;\ -24)$, $|4\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{100 + 576} = 26$.

**3** Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 42. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



**Ответ: 21**

**Решение.** Периметр основания отсечённой призмы вдвое меньше периметра основания исходной (стороны — средние линии и половины сторон), высоты равны. Поэтому площадь боковой поверхности вдвое меньше: $\frac{42}{2} = 21$.

**4** В среднем из 200 электрочайников, поступивших в продажу, 4 неисправны. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля прибор исправен.

**Ответ: 0,98**

**Решение.** $P = \frac{200 - 4}{200} = 0{,}98$.

**5** В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,4 для каждого автомата, автоматы работают независимо. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе закончится в обоих автоматах.

**Ответ: 0,16**

**Решение.** События независимы: $P = 0{,}4^2 = 0{,}16$.

**6** Найдите корень уравнения $2^{x-3} = 4$.

**Ответ: 5**

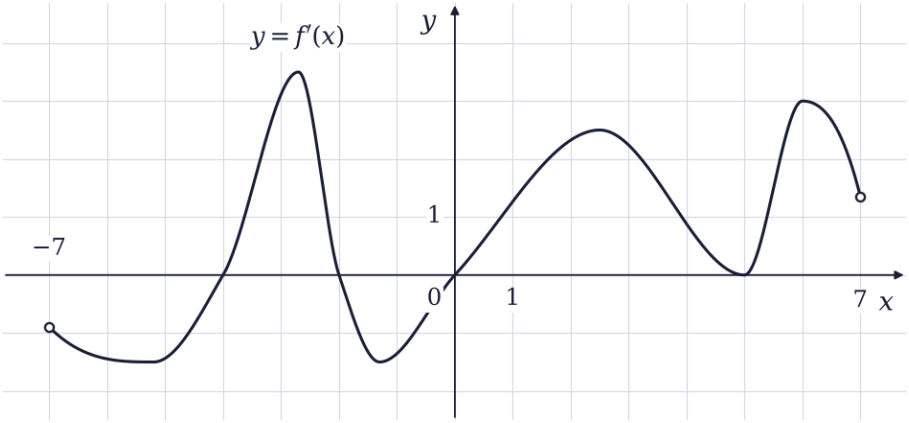
**Решение.** $4 = 2^2$, поэтому $x - 3 = 2$, $x = 5$.

**7** Найдите значение выражения $(\sqrt{275} - \sqrt{176})(\sqrt{275} + \sqrt{176})$.

**Ответ: 99**

**Решение.** По формуле разности квадратов: $(\sqrt{275})^2-(\sqrt{176})^2=275-176=99$.

**8** На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7;\ 7)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на этом интервале.




**Ответ: 1**

**Решение.** В точке максимума производная меняет знак с «+» на «−». Такая точка одна: $x=-2$.

**9** В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C=5\cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R=2\cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0=16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения $U$ (кВ) за время, определяемое выражением $t=\alpha RC\log_2\dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha=0{,}9$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 18 с. Ответ дайте в киловольтах.

**Ответ: 4**

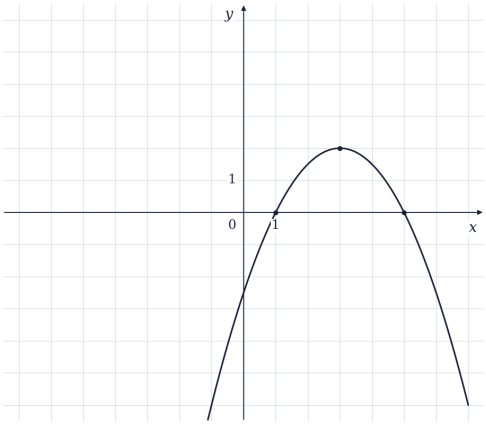
**Решение.** $RC=2\cdot 10^6\cdot 5\cdot 10^{-6}=10$. $18=0{,}9\cdot 10\cdot\log_2\dfrac{16}{U}$, откуда $\log_2\dfrac{16}{U}=2$, $U=\dfrac{16}{4}=4$.

**10** Смешав 5-процентный и 55-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 10-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 90-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 40-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 5-процентного раствора использовали для получения смеси?

**Ответ: 16**

**Решение.** Пусть $x$ кг — масса 5-процентного раствора, $y$ кг — 55-процентного. Тогда $0{,}05x + 0{,}55y = 0{,}1(x + y + 10)$ и $0{,}05x + 0{,}55y + 9 = 0{,}4(x + y + 10)$. Вычитая, получим $x + y + 10 = 30$, откуда $x = 16$, $y = 4$.

**11** На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите значение $f(11)$.




**Ответ: -30**

**Решение.** Вершина параболы — точка $(3;\ 2)$, поэтому $f(x) = a(x - 3)^2 + 2$. По точке $(4;\ 3/2)$: $a = -0{,}5$. $f(11) = -0{,}5 \cdot (11 - 3)^2 + 2 = -30$.

**12** Найдите точку максимума функции y = (x − 5)$^3$ − 108(x − 5) + 82.

**Ответ: -1**

**Решение.** Производная y′ = 3((x − 5)$^2$ − 36). Она равна нулю при x = -1 и x = 11. Знаки производной на трёх промежутках: +, −, +. Поэтому точка максимума x = -1, точка минимума x = 11. Ответ: -1.

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

**13** а) Решите уравнение $2\cos^2 x - \sin(\pi - x) = -1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

**Ответ: а)** $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$**; б)** $-\dfrac{7\pi}{2}$

**Решение.** а) По формуле приведения $\sin(\pi - x) = \sin x$, а $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$2\left(1 - \sin^2 x\right) - \sin x = -1 \iff 2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0.$$

Отсюда $\sin x = 1$ или $\sin x = -1{,}5$. Уравнение $\sin x = -1{,}5$ корней не имеет, так как $|-1{,}5| > 1$.

Если $\sin x = 1$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на $\pi$ получаем неравенства для $k$).

$-\dfrac{7\pi}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant -2\pi \iff -2 \leqslant k \leqslant -\dfrac{5}{4}, k \in \{-2\}: x = -\dfrac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{2}$.

**14** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 16, а боковое ребро равно 6. Точка $M$ — середина ребра $AB$.

а) Докажите, что прямая $CM$ перпендикулярна плоскости $ABB_1$.

б) Найдите угол между прямой $A_1C$ и плоскостью $ABB_1$.

---

**Ответ: б)** $\operatorname{arctg}\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$

**Решение.** а) Треугольник $ABC$ равносторонний, его медиана $CM$ является высотой: $CM \perp AB$. Призма правильная, поэтому боковое ребро $AA_1$ перпендикулярно плоскости основания, и $AA_1 \perp CM$. Прямая $CM$ перпендикулярна двум пересекающимся прямым $AB$ и $AA_1$ плоскости $ABB_1$, значит, $CM \perp (ABB_1)$.

б) По пункту а) $M$ — проекция точки $C$ на плоскость $ABB_1$, поэтому $A_1M$ — проекция прямой $A_1C$, и искомый угол равен $\angle CA_1M$. $CM = \dfrac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$, $A_1M = \sqrt{AA_1^2 + AM^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. В прямоугольном треугольнике $CA_1M$: $\operatorname{tg}\angle CA_1M = \dfrac{CM}{A_1M} = \dfrac{4\sqrt{3}}{5}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$.

**15** Решите неравенство

$$\frac{4^x - 6\cdot 2^{x+1} + 32}{\log_3(x+3)} \leqslant 0.$$

---

**Ответ:** $(-3;\ -2) \cup [2;\ 3]$

**Решение.** Область допустимых значений: $x + 3 > 0$ и $\log_3(x+3)\ /\ 0$, ~~то~~есть $x > -3$, $x\ /\ = -2$.

$6 \cdot 2^{x+1} = 12 \cdot 2^x$, числитель раскладывается на множители: $4^x - 12\cdot 2^x + 32 = (2^x - 4)(2^x - 8)$.

Функции $y = 2^t$ и $y = \log_3 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак $2^x - 4$ совпадает со знаком $x - 2$, знак $2^x - 8$ — со знаком $x - 3$, знак $\log_3(x+3) = \log_3(x+3) - \log_3 1$ — со знаком $x + 2$. Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x+2}\leqslant 0,\quad x>-3.$$

Метод интервалов: на $(-3;\,-2)$ дробь отрицательна; на $(-2;\,2)$ дробь положительна; на $(2;\,3)$ дробь отрицательна; на $(3;\,+\infty)$ дробь положительна; в точках $x=2$, $x=3$ числитель равен нулю.
Ответ: $(-3;\,-2)\cup[2;\,3]$.

**16** Кредит 3,31 млн руб. на 3 года под 10 %. Вариант 1: долг уменьшается равномерно. Вариант 2: три равных платежа. На сколько рублей вариант 1 выгоднее?

---

**Ответ: 21 000 руб.**

**Решение.** Вариант 1: $3{,}31\cdot 1{,}2=3{,}972$. Вариант 2: $X=\dfrac{3{,}31\cdot 0{,}1331}{0{,}331}=1{,}331$, $\Sigma=3{,}993$. Разность $0{,}021$ млн руб.

**17** В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов $A$ и $B$ пересекаются в точке $K$, лежащей на стороне $CD$.
а) Докажите, что $AB=2AD$.
б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AK=8$, $BK=15$.

---

**Ответ: б) 120**

**Решение.** а) Прямые $AB$ и $CD$ параллельны, поэтому $\angle AKD=\angle KAB$ как накрест лежащие углы. $AK$ — биссектриса, поэтому $\angle KAB=\angle KAD$. Значит, $\angle AKD=\angle KAD$, и треугольник $ADK$ равнобедренный: $DK=AD$. Аналогично треугольник $BCK$ равнобедренный: $CK=BC=AD$. Тогда $AB=CD=DK+KC=2AD$.
б) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к стороне $AB$, равна $180^\circ$, поэтому $\angle KAB+\angle KBA=90^\circ$ и $\angle AKB=90^\circ$. Треугольник $ABK$ и параллелограмм имеют общее основание $AB$ и одинаковую высоту (расстояние между прямыми $AB$ и $CD$), поэтому $S_{ABCD}=2S_{ABK}=AK\cdot BK$. $S_{ABCD}=8\cdot 15=120$.
Ответ: б) 120.

**18** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

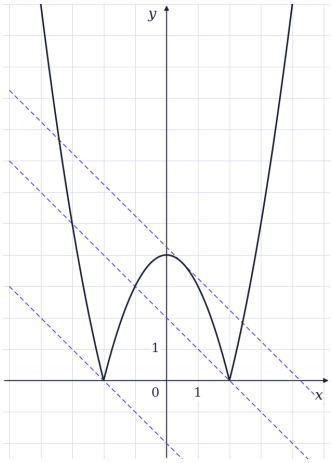
$$\left|x^2-4\right|=-x+a$$

имеет ровно 4 различных корня.

---

**Ответ:** $a\in(2;\,4{,}25)$

**Решение.** Число корней уравнения равно числу общих точек графика $y=\left|x^2-4\right|$ и прямой $y=-x+a$ (угловой коэффициент $-1$). Поскольку $x^2-4=(x+2)(x-2)$, график состоит из трёх частей: ветви параболы $y=x^2-4$ при $x\leqslant -2$, ветви той же параболы при $x\geqslant 2$ и дуги $y=-(x^2-4)$ при $-2<x<2$.




**Граничные положения прямой.** Прямая проходит через точку $(-2;\ 0)$ при $a=-2$ и через точку $(2;\ 0)$ при $a=2$.

Касание с дугой: уравнение $-(x^2-4)=-x+a$, то есть $x^2-x-4+a=0$, имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю: $a=4{,}25$; точка касания $x=0{,}5$ лежит в интервале $(-2;\ 2)$.

Прямая с угловым коэффициентом $-1$ касается параболы $y=x^2-4$ в точке $x=-0{,}5$, которая не принадлежит крайним ветвям, поэтому касания с ветвями нет.

Перемещая прямую снизу вверх (с ростом $a$) и подсчитывая общие точки с графиком, получаем:

| $a$ | $a<-2$ | $-2$ | $(-2;\ 2)$ | $2$ | $(2;\ 4{,}25)$ | $4{,}25$ | $a>4{,}25$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Число корней** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 |

Ровно 4 корня получается при $a\in(2;\ 4{,}25)$.

Ответ: $a\in(2;\ 4{,}25)$.

**19**

Из 15 различных чисел 1,2,…,15 выбирают подмножество с суммой 60.

а) Можно ли выбрать 8 чисел?

б) Можно ли выбрать 4 числа?

в) Какое наименьшее число элементов может быть у такого подмножества?

---

**Ответ: а) да; б) нет; в) 5**

**Решение.** Четыре наибольших числа имеют сумму 15+14+13+12=54<60. Пять чисел 15+14+13+12+6=60 подходят, поэтому минимум равен пяти. Для восьми подходит набор 15+12+10+8+6+4+3+2=60. Значит, а) да.