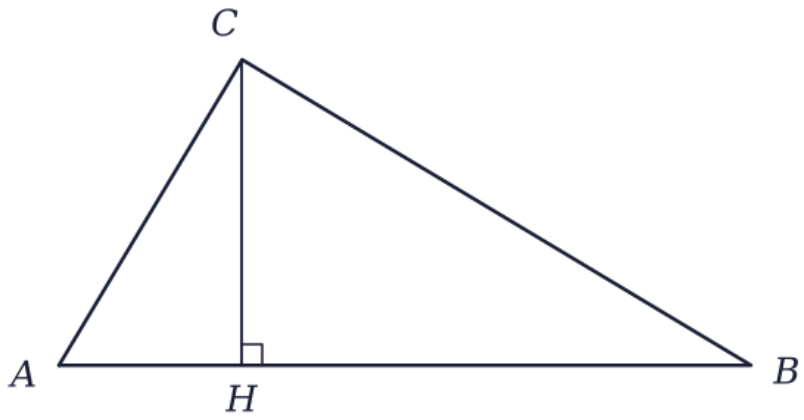
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

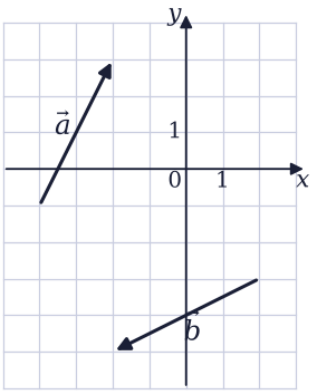
1 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH — высота, $AH = 9$, $BH = 25$. Найдите CH.



Ответ: 15

Решение. Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, есть среднее пропорциональное отрезков гипотенузы: $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{9 \cdot 25} = 15$.

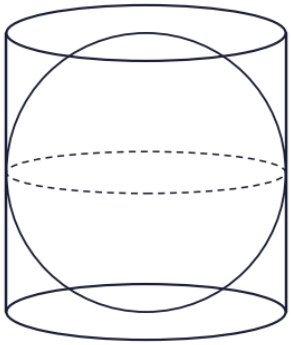
2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Ответ: -16

Решение. По рисунку $\vec{a}\,(2;\ 4)$, $\vec{b}\,(-4;\ -2)$. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-4) + 4 \cdot (-2) = -16$.

3 В цилиндр вписан шар: шар касается обоих оснований цилиндра и его боковой поверхности. Объём цилиндра равен 87. Найдите объём шара.



Ответ: 58

Решение. Высота цилиндра равна диаметру шара: $V_{\text{цил}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 87$, откуда $\pi r^3 = 43{,}5$; $V_{\text{шара}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 58$.

4 В коробке лежат 32 одинаковых на вид чайных пакетиков: 3 пакетика с зелёным чаем, 13 — с белым, остальные — с чёрным. Найдите вероятность того, что случайно выбранный пакетик окажется с чёрным чаем.

Ответ: 0,5

Решение. Пакетиков с чёрным чаем $32 - 3 - 13 = 16$; $P = \dfrac{16}{32} = 0{,}5$.

5 Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 20% этих стёкол, вторая — 80%. Первая фабрика выпускает 4% бракованных стёкол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ: 0,016

Решение. По формуле полной вероятности: $P = 0{,}2 \cdot 0{,}04 + 0{,}8 \cdot 0{,}01 = 0{,}016$.

6 Найдите корень уравнения $\sqrt{39 - 5x} = 3$.

Ответ: 6

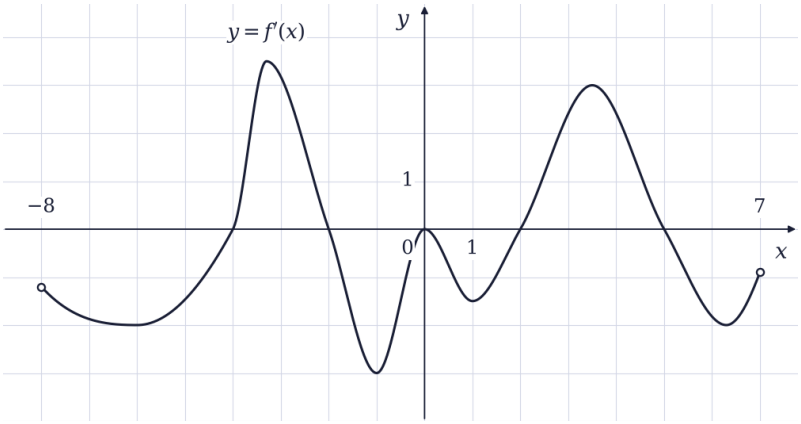
Решение. Возведём обе части в квадрат: $39 - 5x = 9$, $5x = 30$, $x = 6$.

7 Найдите значение выражения $3\operatorname{tg} 66^\circ \cdot \operatorname{tg} 156^\circ$.

Ответ: -3

Решение. $\operatorname{tg} 156^\circ = -\operatorname{ctg} 66^\circ$, а $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, поэтому выражение равно -3.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8;\ 7)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 4

Решение. Точки экстремума — нули производной, в которых она меняет знак: $-4;\ -2;\ 2;\ 5$. В точке 0 график f' касается оси абсцисс без смены знака, это не экстремум. Всего 4.

9 Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 16$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 3$ м/с². За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 26 метров. Ответ дайте в секундах.

Ответ: 2

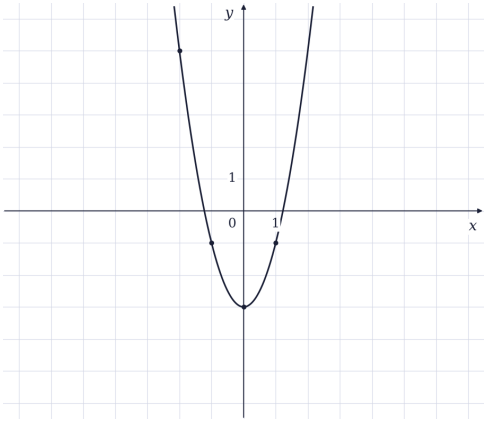
Решение. $16t - \dfrac{3t^2}{2} = 26 \iff 3t^2 - 32t + 52 = 0$. Корни: $t = 2$ и $t = \dfrac{26}{3}$. Торможение длится $\dfrac{v_0}{a} = \dfrac{16}{3}$ с, поэтому подходит $t = 2$.

10 Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 360 литров она заполняет на 15 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: 8

Решение. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{360}{x} - \dfrac{360}{x+4} = 15$, положительный корень $x = 8$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-9)$.



Ответ: 159

Решение. Вершина параболы — точка $(0;\ -3)$, поэтому $f(x) = a(x-0)^2 + (-3)$. По точке $(1;\ -1)$: $a = 2$. $f(-9) = 2 \cdot (-9-0)^2 + (-3) = 159$.

12 Найдите точку минимума функции y = (x − 5)^3 − 108(x − 5) + 79.

Ответ: 11

Решение. Производная y′ = 3((x − 5)^2 − 36). Она равна нулю при x = -1 и x = 11. Знаки производной на трёх промежутках: +, −, +. Поэтому точка максимума x = -1, точка минимума x = 11. Ответ: 11.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x = -1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; **б)** $\dfrac{5\pi}{2}$; $\dfrac{7\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, а $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

Уравнение принимает вид

$$\left(1 - 2\sin^2 x\right) - 0\sin x = -1 \iff \sin^2 x - 1 = 0.$$

Отсюда $\sin x = -1$ или $\sin x = 1$.

Если $\sin x = -1$, то $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Если $\sin x = 1$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$\dfrac{5\pi}{2} \leqslant -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant 4\pi \iff \dfrac{3}{2} \leqslant k \leqslant \dfrac{9}{4}, k \in \{2\}: x = \dfrac{7\pi}{2}.$

$\dfrac{5\pi}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant 4\pi \iff 1 \leqslant n \leqslant \dfrac{7}{4}, n \in \{1\}: x = \dfrac{5\pi}{2}.$

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{5\pi}{2}; \dfrac{7\pi}{2}$.

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 5, боковое ребро равно 12. Точка M — середина ребра SC.

а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости SAC.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BDM.

Ответ: б) $15\sqrt{2}$

Решение. а) Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Диагонали квадрата перпендикулярны: $BD \perp AC$. Пирамида правильная, поэтому её высота — отрезок SO, и $SO \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и SO плоскости SAC, значит, $BD \perp (SAC)$.

б) Плоскость BDM пересекает пирамиду по треугольнику BDM. Отрезок OM — средняя линия треугольника SAC: $OM = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{12}{2}$. Прямая OM лежит в плоскости SAC, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$, то есть OM — высота треугольника BDM. $BD = 5\sqrt{2}$, $S_{BDM} = \dfrac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \dfrac{12}{2} = 15\sqrt{2}$.

Ответ: б) $15\sqrt{2}$.

15

Решите неравенство

$$\frac{4^x - 5 \cdot 2^x + 4}{\log_3(x+4)} \leqslant 0.$$

Ответ: $(-4;\ -3) \cup [0;\ 2]$

Решение. Область допустимых значений: $x + 4 > 0$ и $\log_3(x+4)\ /\ 0$, то есть $x > -4$, $x\ /\ = -3$.

Числитель раскладывается на множители: $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = (2^x - 1)(2^x - 4)$.

Функции $y = 2^t$ и $y = \log_3 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак $2^x - 1$ совпадает со знаком x, знак $2^x - 4$ — со знаком $x - 2$, знак $\log_3(x+4) = \log_3(x+4) - \log_3 1$ — со знаком $x + 3$.

Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{x(x-2)}{x+3} \leqslant 0, \quad x > -4.$$

Метод интервалов: на $(-4;\ -3)$ дробь отрицательна; на $(-3;\ 0)$ дробь положительна; на $(0;\ 2)$ дробь отрицательна; на $(2;\ +\infty)$ дробь положительна; в точках $x = 0$, $x = 2$ числитель равен

нулю.
Ответ: $(-4;\ -3) \cup [0;\ 2]$.

16 Кредит на 2 года под 10 % (стандартная схема) гасится двумя равными платежами, каждый не больше 5 млн руб. Найдите наибольшую сумму кредита, равную целому числу миллионов рублей.
Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 8 000 000 руб.

Решение. $\dfrac{S \cdot 1{,}21}{2{,}1} \le 5 \Rightarrow S \le 8{,}67\ldots$, наибольшее целое число миллионов — 8.

17 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD.
а) Докажите, что $AB = 2AD$.
б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AK = 24$, $BK = 10$.

Ответ: б) 240

Решение. а) Прямые AB и CD параллельны, поэтому $\angle AKD = \angle KAB$ как накрест лежащие углы. AK — биссектриса, поэтому $\angle KAB = \angle KAD$. Значит, $\angle AKD = \angle KAD$, и треугольник ADK равнобедренный: $DK = AD$. Аналогично треугольник BCK равнобедренный: $CK = BC = AD$. Тогда $AB = CD = DK + KC = 2AD$.
б) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к стороне AB, равна 180°, поэтому $\angle KAB + \angle KBA = 90^\circ$ и $\angle AKB = 90^\circ$. Треугольник ABK и параллелограмм имеют общее основание AB и одинаковую высоту (расстояние между прямыми AB и CD), поэтому $S_{ABCD} = 2S_{ABK} = AK \cdot BK$. $S_{ABCD} = 24 \cdot 10 = 240$.
Ответ: б) 240.

18 Найдите все a, при которых уравнение (x−1)/(x+1)=a имеет ровно одно решение при x>0.

Ответ: a∈(−1;1)

Решение. На x>0 левая часть равна 1−2/(x+1), строго возрастает от предельного значения −1 при $x \to 0+$ до предельного значения 1 при $x \to +\infty$. Поэтому каждое a строго между −1 и 1 достигается ровно один раз; границы не достигаются.

19 Шесть различных натуральных чисел образуют арифметическую прогрессию и имеют сумму 75.

а) Возможна ли разность 3?

б) Возможна ли разность 4?

в) Сколько положительных целых разностей такой прогрессии возможны?

Ответ: а) да; б) нет; в) 2

Решение. Если первый член a и разность $d \geq 1$, сумма равна $6a+15d=75$, то есть $2a+5d=25$. Отсюда d нечётно и $5d \leq 23$, поэтому $d \in \{1,3\}$. При $d=1$ получаем $a=10$, при $d=3$ получаем $a=5$. Для $d=4$ число a не целое. Всего две разности.