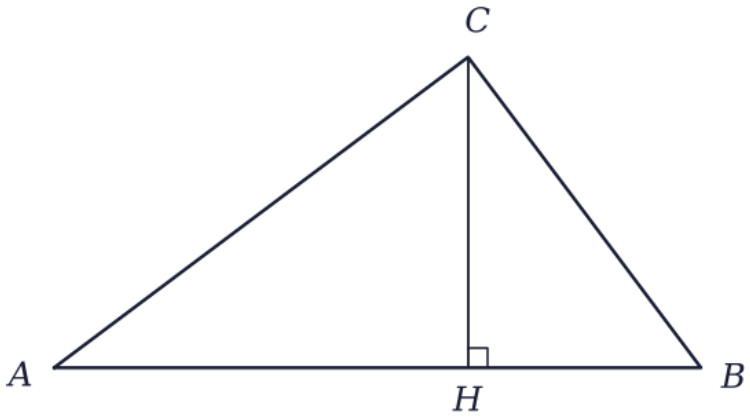
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AH = 16$, $BH = 9$. Найдите CH.



Ответ: 12

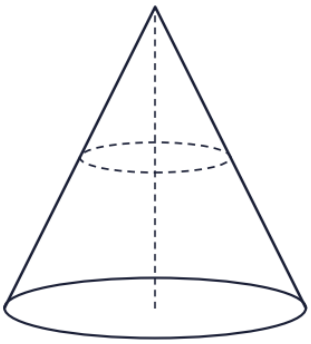
Решение. Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, есть среднее пропорциональное отрезков гипотенузы: $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{16 \cdot 9} = 12$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(4;\ -4)$ и $\vec{b}\,(2;\ 5)$. Найдите длину вектора $\vec{a} + 2\vec{b}$.

Ответ: 10

Решение. $\vec{a} + 2\vec{b} = (8;\ 6)$, $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{64 + 36} = 10$.

3 Через середину высоты конуса параллельно основанию проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Объём меньшего конуса равен 25. Найдите объём исходного конуса.



Ответ: 200

Решение. Меньший конус подобен исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$, объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия: $V = 8 \cdot 25 = 200$.

4 В сборнике билетов по истории всего 400 билетов, в 205 из них встречается вопрос по теме «Петровские реформы». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по этой теме.

Ответ: 0,4875

Решение. Билетов без вопроса по этой теме $400 - 205 = 195$, $P = \frac{195}{400} = 0{,}4875$.

5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первые две мишени и не попадёт в две последние.

Ответ: 0,0441

Решение. Выстрелы независимы: $P = 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}0441$.

6 Найдите корень уравнения $\sqrt{76 - 3x} = 7$.

Ответ: 9

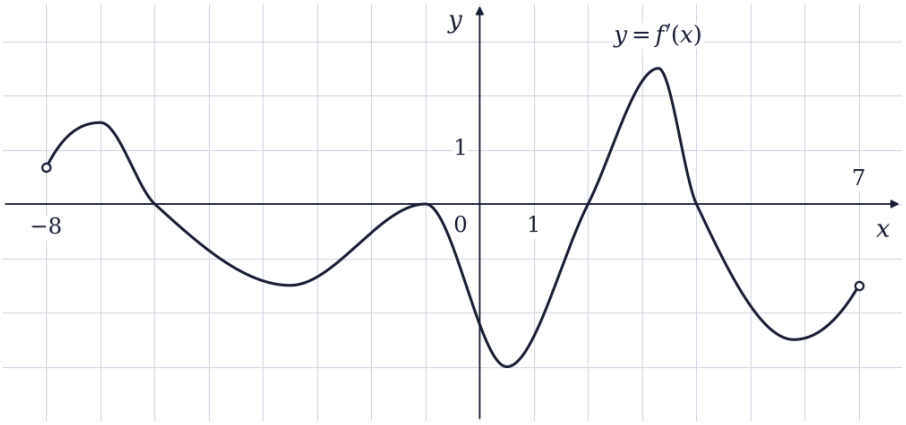
Решение. Возведём обе части в квадрат: $76 - 3x = 49$, $3x = 27$, $x = 9$.

7 Найдите значение выражения $\log_2 6 - \log_2 24$.

Ответ: -2

Решение. $\log_2 6 - \log_2 24 = \log_2 \dfrac{6}{24} = \log_2 0{,}25 = -2$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8;\ 7)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: 2

Решение. Функция возрастает там, где $f'(x) > 0$ (касание оси без смены знака промежуток не разрывает): $(-8;\ -6)$, $(2;\ 4)$. Наибольшая длина равна 2.

9 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 18t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 9 метров?

Ответ: 2,4

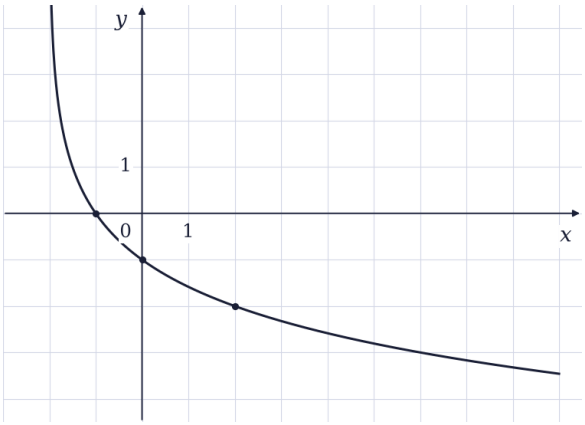
Решение. $h(t) \geqslant 9 \iff 5t^2 - 18t + 9 \leqslant 0 \iff 0{,}6 \leqslant t \leqslant 3$. Мяч находится не ниже 9 м в течение $3 - 0{,}6 = 2{,}4$ с.

10 Катер прошёл 51 км против течения реки и 10 км по течению, затратив на весь путь 7 часов. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 12

Решение. $\dfrac{51}{v-4} + \dfrac{10}{v+4} = 7$. Домножив на $(v-4)(v+4)$, получим квадратное уравнение, положительный корень которого больше 4: $v = 12$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = -\log_a(x+b)$. Найдите $f(62)$.



Ответ: -6

Решение. $\log_a(x+b) = 0$ при $x+b=1$; график пересекает ось абсцисс в точке $x=-1$, поэтому $b=2$. По точке $(2;\ -2)$ находим $a=2$. $f(62) = -\log_2 64 = -6$.

12 Найдите наибольшее значение функции y = (x − 4)^3 − 75(x − 4) + 76 на отрезке [-6; 9].

Ответ: 326

Решение. Производная y′ = 3((x − 4)^2 − 25); критические точки x = -1, x = 9. На концах отрезка y(-6) = -174, y(9) = -174. Во внутренней критической точке y(-1) = 326. Наибольшее значение: 326.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $2\cos^2 x - 3\sin(\pi - x) = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$**; б)** $\pi;\ 2\pi$

Решение. а) По формуле приведения $\sin(\pi - x) = \sin x$, а $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$2\left(1 - \sin^2 x\right) - 3\sin x = 2 \iff 2\sin^2 x + 3\sin x = 0.$$

Отсюда $\sin x = 0$ или $\sin x = -1{,}5$. Уравнение $\sin x = -1{,}5$ корней не имеет, так как $|-1{,}5| > 1$.

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$\frac{\pi}{2} \leqslant \pi k \leqslant 2\pi \iff \frac{1}{2} \leqslant k \leqslant 2, k \in \{1, 2\}$: $x = \pi, x = 2\pi$.

Ответ: а) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) π; 2π.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 6 на ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 2 : 1$.

а) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости ACC_1.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью BDM.

Ответ: б) $6\sqrt{17}$

Решение. а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD \perp AC$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1 \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, значит, $BD \perp (ACC_1)$. Плоскость BDM проходит через прямую BD, перпендикулярную плоскости ACC_1, поэтому плоскости BDM и ACC_1 перпендикулярны.

б) Точка M лежит на ребре CC_1, поэтому плоскость BDM пересекает грани куба по отрезкам BD, BM и DM, и сечение — треугольник BDM. Пусть O — центр квадрата $ABCD$; прямая OM лежит в плоскости ACC_1, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$, и OM — высота треугольника BDM. $OC = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, $CM = 4$, $OM = \sqrt{OC^2 + CM^2} = \sqrt{18 + 16} = \sqrt{34}$, $BD = 6\sqrt{2}$. $S_{BDM} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{34} = 6\sqrt{17}$.

Ответ: б) $6\sqrt{17}$.

15 Решите неравенство

$$\frac{4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8}{\log_5(x+1)} \leqslant 0.$$

Ответ: $(-1;\ 0) \cup [1;\ 2]$

Решение. Область допустимых значений: $x + 1 > 0$ и $\log_5(x+1) \neq 0$, то есть $x > -1$, $x \neq 0$.

$3 \cdot 2^{x+1} = 6 \cdot 2^x$, числитель раскладывается на множители: $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = (2^x - 2)(2^x - 4)$.

Функции $y = 2^t$ и $y = \log_5 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак $2^x - 2$ совпадает со знаком $x - 1$, знак $2^x - 4$ — со знаком $x - 2$, знак $\log_5(x+1) = \log_5(x+1) - \log_5 1$ — со знаком x. Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x} \leqslant 0, \quad x > -1.$$

Метод интервалов: на $(-1;\ 0)$ дробь отрицательна; на $(0;\ 1)$ дробь положительна; на $(1;\ 2)$ дробь отрицательна; на $(2;\ +\infty)$ дробь положительна; в точках $x = 1$, $x = 2$ числитель равен нулю.

Ответ: $(-1;\ 0) \cup [1;\ 2]$.

16 Кредит 1 млн руб. под 10 % (стандартная схема). Каждый год платится 300 тыс. руб., последний платёж может быть меньше и гасит остаток. За сколько лет будет погашен кредит?

Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 5 лет

Решение. Долг (млн): $0{,}8 \to 0{,}58 \to 0{,}338 \to 0{,}0718 \to$ в 5-й год $0{,}07898$ гасится.

17 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ACH и BCH соответственно.

а) Докажите, что $O_1O_2 = r\sqrt{2}$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

б) Найдите O_1O_2, если $AC = 12$, $BC = 9$.

Ответ: б) $3\sqrt{2}$

Решение. а) Треугольники ACH и ABC подобны (прямоугольные, с общим острым углом A), коэффициент подобия $\dfrac{AC}{AB}$; треугольники BCH и ABC подобны с коэффициентом $\dfrac{BC}{AB}$. Поэтому радиусы вписанных окружностей равны $r_1 = r\cdot\dfrac{AC}{AB}$ и $r_2 = r\cdot\dfrac{BC}{AB}$.

Центр вписанной окружности лежит на биссектрисе угла, поэтому HO_1 и HO_2 — биссектрисы прямых углов AHC и BHC: $\angle O_1HC = \angle O_2HC = 45^\circ$, $\angle O_1HO_2 = 90^\circ$. Расстояние от O_1 до сторон угла AHC равно r_1, поэтому $HO_1 = r_1\sqrt{2}$; аналогично $HO_2 = r_2\sqrt{2}$.

По теореме Пифагора $O_1O_2^2 = 2r_1^2 + 2r_2^2 = 2r^2\cdot\dfrac{AC^2+BC^2}{AB^2} = 2r^2$, то есть $O_1O_2 = r\sqrt{2}$.

б) $AB = \sqrt{12^2+9^2} = 15$. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник: $r = \dfrac{AC+BC-AB}{2} = \dfrac{12+9-15}{2} = 3$. По пункту а) $O_1O_2 = 3\sqrt{2}$.

Ответ: б) $3\sqrt{2}$.

18 Найдите все a, при которых уравнение |x|+|x−2|=a имеет ровно два различных действительных корня.

Ответ: a∈(2;+∞)

Решение. При 0≤x≤2 левая часть равна 2, поэтому при a=2 корней бесконечно много. На x<0 она равна 2−2x, на x>2 — 2x−2. При a>2 каждая крайняя ветвь даёт ровно один корень; при a<2 нет ни одного.

19

У прямоугольника стороны — различные натуральные числа, а периметр равен 30.

а) Может ли его площадь равняться 50?

б) Может ли она равняться 57?

в) Какова наибольшая возможная площадь?

Ответ: а) да; б) нет; в) 56

Решение. Если стороны a