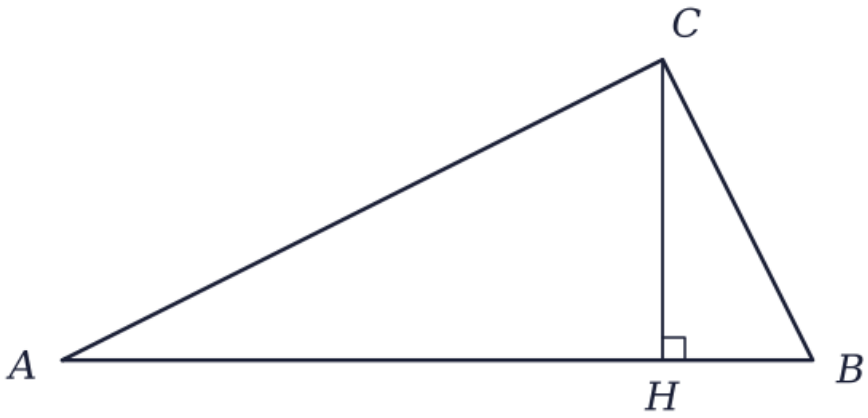
## Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

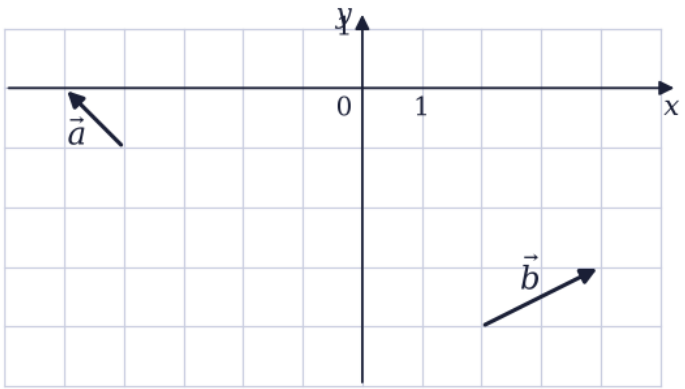
**1** В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен $90°$, $CH$ — высота, $AH = 8$, $BH = 2$. Найдите $CH$.




**Ответ: 4**

**Решение.** Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, есть среднее пропорциональное отрезков гипотенузы: $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{8 \cdot 2} = 4$.

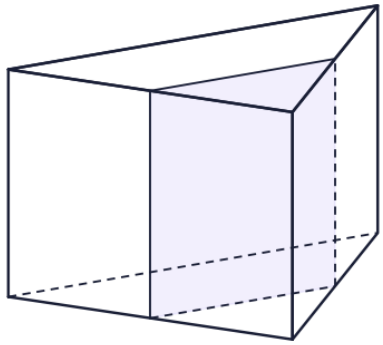
**2** На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.




**Ответ: -1**

**Решение.** По рисунку $\vec{a}\,(-1;\,1)$, $\vec{b}\,(2;\,1)$. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -1$.

**3** Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объём отсечённой треугольной призмы равен 16. Найдите объём исходной призмы.



**Ответ: 64**

**Решение.** Основание отсечённой призмы — треугольник, подобный основанию исходной с коэффициентом $\frac{1}{2}$, его площадь в 4 раза меньше. Высоты призм равны, поэтому объём исходной призмы в 4 раза больше: $4 \cdot 16 = 64$.

**4** В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно два раза.

**Ответ: 0,375**

**Решение.** Всего равновозможных исходов $2^3 = 8$, благоприятных — $C_3^2 = 3$. $P = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

**5** Вероятность того, что на тесте по истории учащийся верно решит больше 9 задач, равна 0,8. Вероятность того, что он верно решит больше 8 задач, равна 0,89. Найдите вероятность того, что учащийся верно решит ровно 9 задач.

**Ответ: 0,09**

**Решение.** Событие «решит больше 8 задач» — объединение несовместных событий «решит ровно 9» и «решит больше 9». Поэтому $P = 0{,}89 - 0{,}8 = 0{,}09$.

**6** Найдите корень уравнения $3^{x+4} = 81$.

**Ответ: 0**

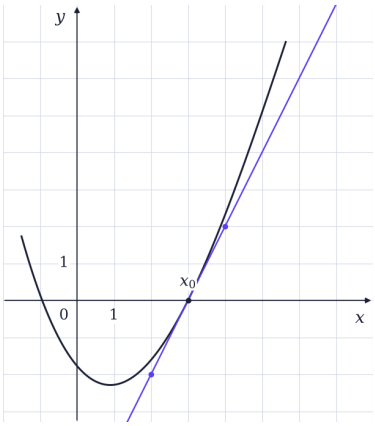
**Решение.** $81 = 3^4$, поэтому $x + 4 = 4$, $x = 0$.

**7** Найдите значение выражения $(\sqrt{75} - \sqrt{192})(\sqrt{75} + \sqrt{192})$.

**Ответ: -117**

**Решение.** По формуле разности квадратов: $(\sqrt{75})^2-(\sqrt{192})^2=75-192=-117$.

**8** На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.




---

**Ответ: 2**

**Решение.** Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Касательная проходит через точки $(2;\ -2)$ и $(4;\ 2)$: $k=\dfrac{2-(-2)}{4-2}=2$.

**9** Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t)=2+27t-5t^2$, где $h$ — высота в метрах, $t$ — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 36 метров?

---

**Ответ: 1,4**

**Решение.** $h(t)\geqslant 36 \iff 5t^2-27t+34\leqslant 0 \iff 2\leqslant t\leqslant 3{,}4$. Мяч находится не ниже 36 м в течение $3{,}4-2=1{,}4$ с.

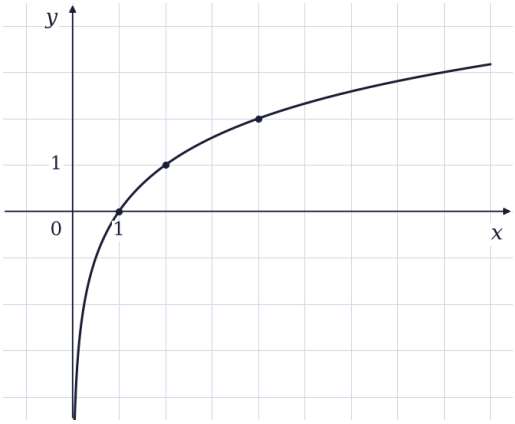
**10** Смешав 45-процентный и 95-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 57-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 90-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 75-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 45-процентного раствора использовали для получения смеси?

---

**Ответ: 19**

**Решение.** Пусть $x$ кг — масса 45-процентного раствора, $y$ кг — 95-процентного. Тогда $0{,}45x+0{,}95y=0{,}57(x+y+10)$ и $0{,}45x+0{,}95y+9=0{,}75(x+y+10)$. Вычитая, получим $x+y+10=50$, откуда $x=19$, $y=21$.

**11** На рисунке изображён график функции $f(x)=\log_a(x+b)$. Найдите $f(32)$.




**Ответ: 5**

**Решение.** $\log_a(x+b)=0$ при $x+b=1$; график пересекает ось абсцисс в точке $x=1$, поэтому $b=0$. По точке $(4;\ 2)$ находим $a=2$. $f(32)=\log_2 32=5$.

**12** Найдите точку максимума функции y = 5ln x − x + 73.

**Ответ: 5**

**Решение.** Область определения: x > 0. Производная y′ = 5/x − 1. Она положительна при 0 < x < 5 и отрицательна при x > 5. Точка максимума x = 5.

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

**13** а) Решите уравнение $2\cos^2 x+5\sin(\pi-x)=-1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

**Ответ: а)** $-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; **б)** $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$

**Решение.** а) По формуле приведения $\sin(\pi-x)=\sin x$, а $\cos^2 x=1-\sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$2\left(1-\sin^2 x\right)+5\sin x=-1 \iff 2\sin^2 x-5\sin x-3=0.$$

Отсюда $\sin x=-\frac{1}{2}$ или $\sin x=3$. Уравнение $\sin x=3$ корней не имеет, так как $|3|>1$.

Если $\sin x=-\frac{1}{2}$, то $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на $\pi$ получаем неравенства для $k$).

$\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant 2\pi \iff \frac{1}{3} \leqslant k \leqslant \frac{13}{12}, k \in \{1\}: x = \frac{11\pi}{6}.$
$\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant 2\pi \iff \frac{2}{3} \leqslant n \leqslant \frac{17}{12}, n \in \{1\}: x = \frac{7\pi}{6}.$
Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$.

**14** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 16 на ребре $CC_1$ отмечена точка $M$ так, что $CM : MC_1 = 3 : 1$.

а) Докажите, что плоскость $BDM$ перпендикулярна плоскости $ACC_1$.

б) Найдите угол между плоскостью $BDM$ и плоскостью $ABCD$.

---

**Ответ: б)** $\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{2}}{4}$

**Решение.** а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD \perp AC$. Ребро $CC_1$ перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1 \perp BD$. Прямая $BD$ перпендикулярна двум пересекающимся прямым $AC$ и $CC_1$ плоскости $ACC_1$, значит, $BD \perp (ACC_1)$. Плоскость $BDM$ проходит через прямую $BD$, перпендикулярную плоскости $ACC_1$, поэтому плоскости $BDM$ и $ACC_1$ перпендикулярны.

б) Пусть $O$ — центр квадрата $ABCD$. Прямая $OM$ лежит в плоскости $ACC_1$, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$; кроме того, $OC \perp BD$. Значит, $\angle MOC$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями $BDM$ и $ABCD$. $OC = \frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}, CM = 12, \operatorname{tg} \angle MOC = \frac{CM}{OC} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

**15** Решите неравенство

$$\frac{9^x - 10 \cdot 3^x + 9}{\log_3(x+2)} \leqslant 0.$$

---

**Ответ:** $(-2;\ -1) \cup [0;\ 2]$

**Решение.** Область допустимых значений: $x + 2 > 0$ и $\log_3(x+2) \neq 0$, то есть $x > -2$, $x \neq -1$.

Числитель раскладывается на множители: $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = (3^x - 1)(3^x - 9)$.

Функции $y = 3^t$ и $y = \log_3 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак $3^x - 1$ совпадает со знаком $x$, знак $3^x - 9$ — со знаком $x - 2$, знак $\log_3(x+2) = \log_3(x+2) - \log_3 1$ — со знаком $x + 1$.

Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{x(x-2)}{x+1} \leqslant 0, \quad x > -2.$$

Метод интервалов: на $(-2;\ -1)$ дробь отрицательна; на $(-1;\ 0)$ дробь положительна; на $(0;\ 2)$ дробь отрицательна; на $(2;\ +\infty)$ дробь положительна; в точках $x = 0, x = 2$ числитель равен

нулю.
Ответ: $(-2;\ -1)\cup[0;\ 2]$.

**16** В июле 2032 года планируется взять кредит в банке на 4 года. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Найдите сумму кредита, если общая сумма выплат по кредиту составит 240 000 рублей. Ответ дайте в рублях.

---

**Ответ: 160 000**

**Решение.** Пусть $S$ руб. — сумма кредита. Долг ежегодно уменьшается на $\frac{S}{4}$, проценты за все годы: $0{,}2S\left(1+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{1}{4}\right)=0{,}2S\cdot\frac{5}{2}=0{,}5S$, общая сумма выплат $1{,}5S=240\,000$, откуда $S=160\,000$.

**17** В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов $A$ и $B$ пересекаются в точке $K$, лежащей на стороне $CD$.
а) Докажите, что $AB=2AD$.
б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AD=\frac{5}{2}$, $AK=3$.

---

**Ответ: б) 12**

**Решение.** а) Прямые $AB$ и $CD$ параллельны, поэтому $\angle AKD=\angle KAB$ как накрест лежащие углы. $AK$ — биссектриса, поэтому $\angle KAB=\angle KAD$. Значит, $\angle AKD=\angle KAD$, и треугольник $ADK$ равнобедренный: $DK=AD$. Аналогично треугольник $BCK$ равнобедренный: $CK=BC=AD$. Тогда $AB=CD=DK+KC=2AD$.
б) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к стороне $AB$, равна $180^\circ$, поэтому $\angle KAB+\angle KBA=90^\circ$ и $\angle AKB=90^\circ$. Треугольник $ABK$ и параллелограмм имеют общее основание $AB$ и одинаковую высоту (расстояние между прямыми $AB$ и $CD$), поэтому $S_{ABCD}=2S_{ABK}=AK\cdot BK$. По пункту а) $AB=2AD=5$. Из прямоугольного треугольника $ABK$: $BK=\sqrt{AB^2-AK^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$. $S_{ABCD}=3\cdot4=12$.
Ответ: б) 12.

**18** Найдите все a, при которых уравнение sin x=a имеет ровно два решения на отрезке [0;2π].

---

**Ответ: a∈(−1;0)∪(0;1)**

**Решение.** При −1

**19** Натуральное число делится и на 6, и на 10.

а) Может ли оно равняться 90?

б) Может ли оно равняться 100?

в) Сколько таких чисел в промежутке от 1 до 1000 включительно?

---

**Ответ: а) да; б) нет; в) 33**

**Решение.** Число обязано делиться на НОК(6,10)=30. Число $90=3\cdot30$ подходит, 100 не делится на 30. Все нужные числа имеют вид $30k$, где $1\le k\le\lfloor 1000/30\rfloor=33$.