Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = \dfrac{5}{13}$, $AC = 10$. Найдите BC.



Ответ: 24

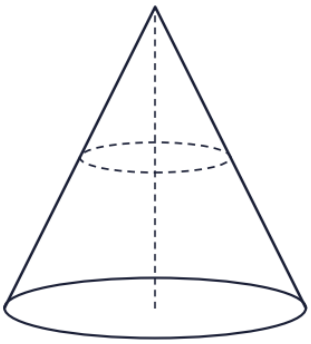
Решение. По определению $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$, поэтому $AB = \dfrac{AC}{\cos A} = 10 : \dfrac{5}{13} = 26$. По теореме Пифагора $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(3;\ -3)$ и $\vec{b}\,(2;\ -2)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: 12

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + (-3) \cdot (-2) = 12$.

3 Через середину высоты конуса параллельно основанию проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Объём меньшего конуса равен 5. Найдите объём исходного конуса.



Ответ: 40

Решение. Меньший конус подобен исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$, объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия: $V = 8 \cdot 5 = 40$.

4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют 12 спортсменов из Финляндии, 10 спортсменов из Дании и 10 спортсменов из Швеции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Ответ: 0,3125

Решение. Всего спортсменов $12 + 10 + 10 = 32$, $P = \frac{10}{32} = 0{,}3125$.

5 Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,8, второго — 0,8. Найдите вероятность того, что в мишень попадёт ровно один стрелок.

Ответ: 0,32

Решение. Ровно одно попадание: первый попал, второй нет, или наоборот. $P = 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$.

6 Решите уравнение $\sin \frac{\pi(x-1)}{6} = \frac{1}{2}$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Ответ: -6

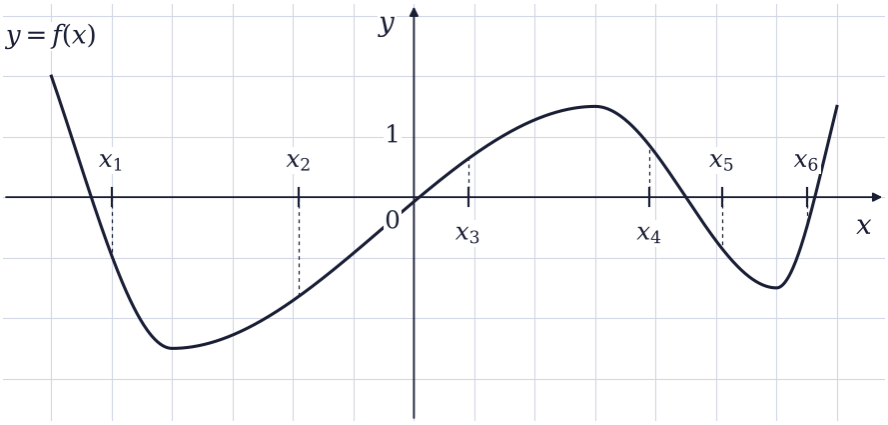
Решение. Решения: $x - 1 = 1 + 12k$, $x - 1 = 5 + 12k$, $k \in \mathbb{Z}$. Перебором k находим наибольший отрицательный корень: $x = -6$.

7 Найдите значение выражения $4\operatorname{tg}7^\circ \cdot \operatorname{tg}97^\circ$.

Ответ: -4

Решение. $\operatorname{tg}97^\circ = -\operatorname{ctg}7^\circ$, а $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, поэтому выражение равно -4.

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечено 6 точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Ответ: 3

Решение. Производная отрицательна в тех точках, где функция убывает. По графику таких точек 3.

9 Мяч бросили с начальной скоростью $v_0 = 16$ м/с под острым углом α к горизонту. Наибольшая высота подъёма мяча вычисляется по формуле $H = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$ (м), где g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мяч поднимется на высоту не менее 3,2 м?

Ответ: 30

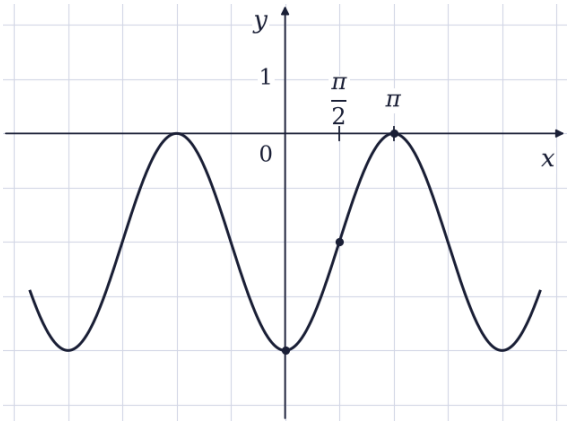
Решение. $\dfrac{256\sin^2\alpha}{20} \geqslant 3{,}2 \iff \sin^2\alpha \geqslant 0{,}25$. Для острого угла $\sin\alpha > 0$, поэтому $\sin\alpha \geqslant \dfrac{1}{2}$. Синус на $(0^\circ;\ 90^\circ)$ возрастает, наименьший угол — 30°.

10 Катер прошёл 23 км против течения реки и 51 км по течению, затратив на весь путь 8 часов. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 5 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 10

Решение. $\dfrac{23}{v-5} + \dfrac{51}{v+5} = 8$. Домножив на $(v-5)(v+5)$, получим квадратное уравнение, положительный корень которого больше 5: $v = 10$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = a\cos x + b$. Найдите $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.



Ответ: -1

Решение. По графику $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = b = -2$, $f(0) = a + b = -4$, откуда $a = -2$. $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) - 2 = -2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 2 = -1$.

12 Найдите точку максимума функции $y = x^2e^{5-x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

Ответ: 2

Решение. Производная $y' = e^{5-x}x(2-x)$. При $0 < x < 2$ она положительна, при $x > 2$ отрицательна. Значит, точка максимума $x = 2$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x - 3\cos(\pi - x) = 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; **б)** $\dfrac{5\pi}{3}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos(\pi - x) = -\cos x$, а $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Уравнение принимает вид

$$\left(2\cos^2 x - 1\right) + 3\cos x = 1 \iff 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0.$$

Отсюда $\cos x = \dfrac{1}{2}$ или $\cos x = -2$. Уравнение $\cos x = -2$ корней не имеет, так как $|-2| > 1$.

Если $\cos x = \dfrac{1}{2}$, то $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$\dfrac{\pi}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant 2\pi \iff \dfrac{1}{12} \leqslant k \leqslant \dfrac{5}{6}$: целых решений нет.

$\dfrac{\pi}{2} \leqslant -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant 2\pi \iff \dfrac{5}{12} \leqslant n \leqslant \dfrac{7}{6}, n \in \{1\}$: $x = \dfrac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{5\pi}{3}$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 10, боковое ребро равно 14.

а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости SAC.

б) Найдите угол между прямой SB и плоскостью SAC.

Ответ: б) $\arcsin \dfrac{5\sqrt{2}}{14}$

Решение. а) Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Диагонали квадрата перпендикулярны: $BD \perp AC$. Пирамида правильная, поэтому её высота — отрезок SO, и $SO \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и SO плоскости SAC, значит, $BD \perp (SAC)$.

б) По пункту а) $BO \perp (SAC)$, поэтому SO — проекция прямой SB на плоскость SAC, и искомый угол равен $\angle BSO$. В прямоугольном треугольнике BSO: $BO = \dfrac{10\sqrt{2}}{2}$, $SB = 14$, $\sin \angle BSO = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{5\sqrt{2}}{14}$.

Ответ: б) $\arcsin \dfrac{5\sqrt{2}}{14}$.

15 Решите неравенство

$$\log_2^2 x - 3\log_2 x \leqslant 0.$$

Ответ: $[1;\ 8]$

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Сделаем замену $t = \log_2 x$: $t^2 - 3t \leqslant 0 \iff t(t-3) \leqslant 0 \iff 0 \leqslant t \leqslant 3$.

Функция $y = \log_2 x$ возрастает, поэтому $0 \leqslant \log_2 x \leqslant 3 \iff 1 \leqslant x \leqslant 8$.

Ответ: $[1;\ 8]$.

16 В июле 2030 года планируется взять кредит в банке на 4 года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите сумму кредита, если общая сумма выплат по кредиту составит 3 547 500 рублей. Ответ дайте в рублях.

Ответ: 2 580 000

Решение. Пусть S руб. — сумма кредита. Долг ежегодно уменьшается на $\frac{S}{4}$, проценты за все годы: $0{,}15S\left(1+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{1}{4}\right)=0{,}15S\cdot\frac{5}{2}=0{,}375S$, общая сумма выплат $1{,}375S=3\,547\,500$, откуда $S=2\,580\,000$.

17 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ACH и BCH соответственно.

а) Докажите, что $O_1O_2=r\sqrt{2}$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

б) Найдите O_1O_2, если $AC=15$, $BC=8$.

Ответ: б) $3\sqrt{2}$

Решение. а) Треугольники ACH и ABC подобны (прямоугольные, с общим острым углом A), коэффициент подобия $\frac{AC}{AB}$; треугольники BCH и ABC подобны с коэффициентом $\frac{BC}{AB}$. Поэтому радиусы вписанных окружностей равны $r_1=r\cdot\frac{AC}{AB}$ и $r_2=r\cdot\frac{BC}{AB}$.

Центр вписанной окружности лежит на биссектрисе угла, поэтому HO_1 и HO_2 — биссектрисы прямых углов AHC и BHC: $\angle O_1HC=\angle O_2HC=45^\circ$, $\angle O_1HO_2=90^\circ$. Расстояние от O_1 до сторон угла AHC равно r_1, поэтому $HO_1=r_1\sqrt{2}$; аналогично $HO_2=r_2\sqrt{2}$.

По теореме Пифагора $O_1O_2^2=2r_1^2+2r_2^2=2r^2\cdot\frac{AC^2+BC^2}{AB^2}=2r^2$, то есть $O_1O_2=r\sqrt{2}$.

б) $AB=\sqrt{15^2+8^2}=17$. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник: $r=\frac{AC+BC-AB}{2}=\frac{15+8-17}{2}=3$. По пункту а) $O_1O_2=3\sqrt{2}$.

Ответ: б) $3\sqrt{2}$.

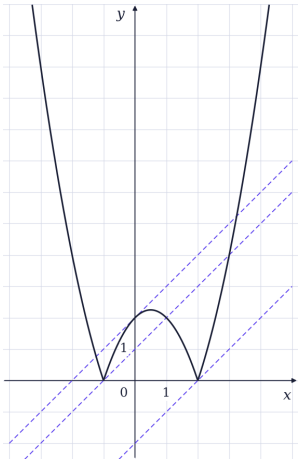
18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-x-2\right|=x+a$$

имеет ровно 2 различных корня.

Ответ: $a\in(-2;\,1)\cup(2;\,+\infty)$

Решение. Число корней уравнения равно числу общих точек графика $y=\left|x^2-x-2\right|$ и прямой $y=x+a$ (угловой коэффициент 1). Поскольку $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$, график состоит из трёх частей: ветви параболы $y=x^2-x-2$ при $x\leqslant -1$, ветви той же параболы при $x\geqslant 2$ и дуги $y=-(x^2-x-2)$ при $-1<x<2$.



Граничные положения прямой. Прямая проходит через точку $(-1;\,0)$ при $a=1$ и через точку $(2;\,0)$ при $a=-2$.

Касание с дугой: уравнение $-(x^2-x-2)=x+a$, то есть $x^2-2+a=0$, имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю: $a=2$; точка касания $x=0$ лежит в интервале $(-1;\,2)$.

Прямая с угловым коэффициентом 1 касается параболы $y=x^2-x-2$ в точке $x=1$, которая не принадлежит крайним ветвям, поэтому касания с ветвями нет.

Перемещая прямую снизу вверх (с ростом a) и подсчитывая общие точки с графиком, получаем:

a	$a<-2$	-2	$(-2;\,1)$	1	$(1;\,2)$	2	$a>2$
Число корней	0	1	2	3	4	3	2

Ровно 2 корня получается при $a\in(-2;\,1)\cup(2;\,+\infty)$.

Ответ: $a\in(-2;\,1)\cup(2;\,+\infty)$.

19 Четыре целых числа записаны в порядке возрастания, а их сумма равна 0.

а) Может ли последовательность быть $(-3,-1,1,3)$?

б) Может ли сумма трёх наименьших быть положительной?

в) Какой наименьшей может быть сумма квадратов четырёх попарно различных чисел?

Ответ: а) да; б) нет; в) 10

Решение. Числа из пункта а) подходят. Сумма трёх наименьших равна минусу наибольшего. Наибольшее обязательно положительно: иначе все четыре числа не превосходят нуля и их сумма отрицательна. Поэтому пункт б) невозможен. Чтобы сумма квадратов была меньше 10, числа должны входить в $\{-2,-1,0,1,2\}$. Четыре числа из этого множества имеют сумму 0 только при удалении нуля; сумма квадратов оставшихся равна 10. Набор $\{-2,-1,1,2\}$ достигает этой границы.