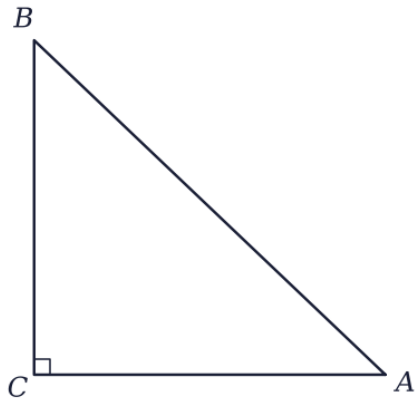
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = \dfrac{20}{29}$, $BC = 40$. Найдите AC.



Ответ: 42

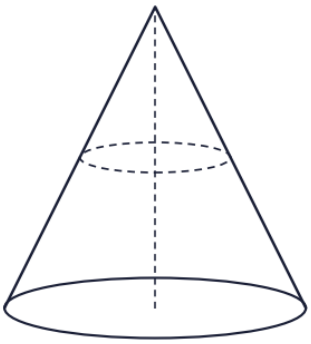
Решение. По определению $\sin A = \dfrac{BC}{AB}$, поэтому $AB = \dfrac{BC}{\sin A} = 40 : \dfrac{20}{29} = 58$. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{58^2 - 40^2} = 42$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(4;\ -3)$ и $\vec{b}\,(-4;\ -1)$. Найдите длину вектора $4\vec{a} - 2\vec{b}$.

Ответ: 26

Решение. $4\vec{a} - 2\vec{b} = (24;\ -10)$, $|4\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{576 + 100} = 26$.

3 Объём конуса равен 224. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.



Ответ: 28

Решение. Меньший конус подобен исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$, объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия: $V' = \frac{224}{8} = 28$.

4 В сборнике билетов по физике всего 125 билетов, в 53 из них встречается вопрос по теме «Законы Ньютона». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по этой теме.

Ответ: 0,424

Решение. $P = \frac{53}{125} = 0{,}424$.

5 Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 50% этих стёкол, вторая — 50%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стёкол, а вторая — 4%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ: 0,035

Решение. По формуле полной вероятности: $P = 0{,}5 \cdot 0{,}03 + 0{,}5 \cdot 0{,}04 = 0{,}035$.

6 Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{\pi(x+4)}{4} = 1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Ответ: -3

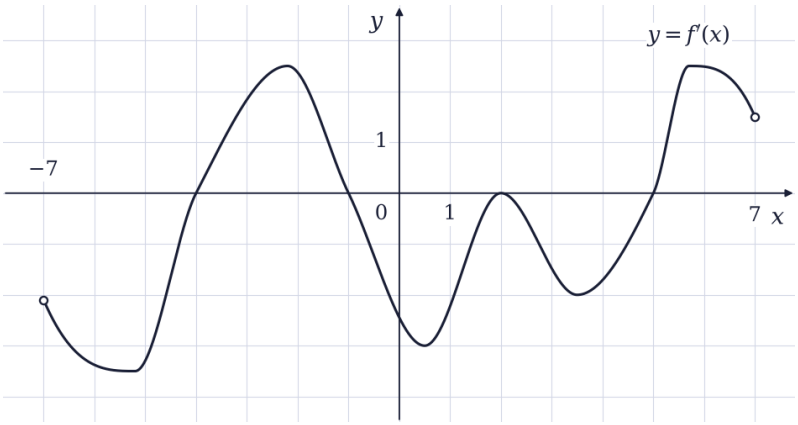
Решение. Решения: $x + 4 = 1 + 4k$, $k \in \mathbb{Z}$. Перебором k находим наибольший отрицательный корень: $x = -3$.

7 Найдите значение выражения $\dfrac{18\sin 48^\circ}{\sin 24^\circ \cdot \sin 66^\circ}$.

Ответ: 36

Решение. $\sin 66^\circ = \cos 24^\circ$, а $\sin 48^\circ = 2\sin 24^\circ \cos 24^\circ$, поэтому выражение равно $18 \cdot 2 = 36$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7;\ 7)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 3

Решение. Точки экстремума — нули производной, в которых она меняет знак: $-4;\ -1;\ 5$. В точке 2 график f' касается оси абсцисс без смены знака, это не экстремум. Всего 3.

9 Мяч бросили под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мяч, вычисляется по формуле $L = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 28$ м/с — начальная скорость мяча, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мяч перелетит реку шириной 39,2 м?

Ответ: 15

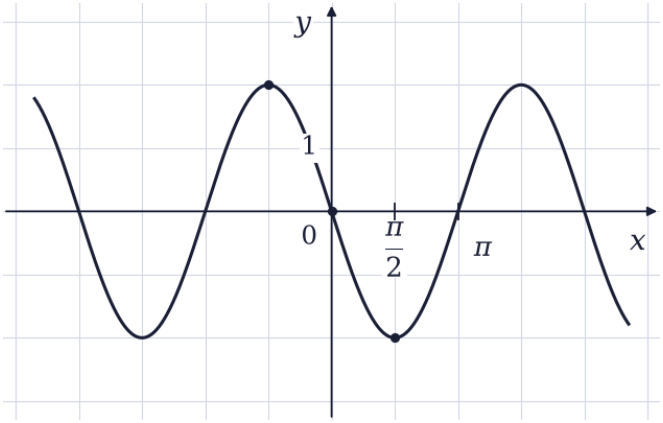
Решение. Нужно $\dfrac{784}{10}\sin 2\alpha \geqslant 39{,}2$, то есть $\sin 2\alpha \geqslant \dfrac{1}{2}$. Так как $0^\circ < 2\alpha < 180^\circ$, это выполняется при $30^\circ \leqslant 2\alpha \leqslant 150^\circ$, то есть $15^\circ \leqslant \alpha \leqslant 75^\circ$. Наименьший угол — 15°.

10 Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 90 литров она заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба?

Ответ: 9

Решение. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{90}{x}-\dfrac{90}{x+1}=1$, положительный корень $x=9$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x)=a\sin x+b$. Найдите $f\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$.



Ответ: 1

Решение. По графику $f(0)=b=0$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a+b=-2$, откуда $a=-2$. $f\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)=-2\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)=-2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$.

12 Найдите наименьшее значение функции y = x + 25/x + 67 на отрезке [2,5; 15].

Ответ: 77

Решение. На отрезке x > 0. Производная y′ = 1 − 25/x^2 отрицательна при x < 5 и положительна при x > 5. Минимум достигается при x = 5; y(5) = 5 + 5 + 67 = 77.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $2\cos 2x-4\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=-1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; **б)** $-\dfrac{5\pi}{6}$; $-\dfrac{\pi}{6}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x$, а $\cos 2x=1-2\sin^2 x$.

Уравнение принимает вид

$$2\left(1-2\sin^2 x\right)+4\sin x=-1 \iff 4\sin^2 x-4\sin x-3=0.$$

Отсюда $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ или $\sin x=1{,}5$. Уравнение $\sin x=1{,}5$ корней не имеет, так как $|1{,}5|>1$.

Если $\sin x=-\dfrac{1}{2}$, то $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$-\pi\leqslant -\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\leqslant\dfrac{\pi}{2} \iff -\dfrac{5}{12}\leqslant k\leqslant\dfrac{1}{3}, k\in\{0\}\colon x=-\dfrac{\pi}{6}.$

$-\pi\leqslant -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\leqslant\dfrac{\pi}{2} \iff -\dfrac{1}{12}\leqslant n\leqslant\dfrac{2}{3}, n\in\{0\}\colon x=-\dfrac{5\pi}{6}.$

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{5\pi}{6}$; $-\dfrac{\pi}{6}$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 16, а боковое ребро равно 15. Точка M — середина ребра AB.

а) Докажите, что прямая CM перпендикулярна плоскости ABB_1.

б) Найдите угол между прямой A_1C и плоскостью ABB_1.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{8\sqrt{3}}{17}$

Решение. а) Треугольник ABC равносторонний, его медиана CM является высотой: $CM\perp AB$. Призма правильная, поэтому боковое ребро AA_1 перпендикулярно плоскости основания, и $AA_1\perp CM$. Прямая CM перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB и AA_1 плоскости ABB_1, значит, $CM\perp(ABB_1)$.

б) По пункту а) M — проекция точки C на плоскость ABB_1, поэтому A_1M — проекция прямой A_1C, и искомый угол равен $\angle CA_1M$. $CM=\dfrac{16\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$, $A_1M=\sqrt{AA_1^2+AM^2}=\sqrt{15^2+8^2}=17$. В прямоугольном треугольнике CA_1M: $\operatorname{tg}\angle CA_1M=\dfrac{CM}{A_1M}=\dfrac{8\sqrt{3}}{17}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{8\sqrt{3}}{17}$.

15 Решите неравенство

$$\frac{9^x-4\cdot 3^{x+1}+27}{\log_2(x+4)}\geqslant 0.$$

Ответ: $(-3;\ 1]\cup[2;\ +\infty)$

Решение. Область допустимых значений: $x+4>0$ и $\log_2(x+4)\ /\ 0$, то~есть $x>-4$, $x\ /\ =-3$.

$4\cdot 3^{x+1}=12\cdot 3^x$, числитель раскладывается на множители: $9^x-12\cdot 3^x+27=(3^x-3)(3^x-9)$.

Функции $y=3^t$ и $y=\log_2 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак 3^x-3 совпадает со знаком $x-1$, знак 3^x-9 — со знаком $x-2$, знак $\log_2(x+4)=\log_2(x+4)-\log_2 1$ — со знаком $x+3$. Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x+3}\geqslant 0,\quad x>-4.$$

Метод интервалов: на $(-4;\,-3)$ дробь отрицательна; на $(-3;\,1)$ дробь положительна; на $(1;\,2)$ дробь отрицательна; на $(2;\,+\infty)$ дробь положительна; в точках $x=1$, $x=2$ числитель равен нулю.
Ответ: $(-3;\,1]\cup[2;\,+\infty)$.

16 Кредит 2 млн руб. на 2 года (стандартная схема, ставка r %). После первого платежа долг равен 1,2 млн руб., второй платёж гасит долг. Общая сумма выплат 2 640 000 руб. Найдите r.

Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 20 %

Решение. Платежи: $2q-1{,}2$ и $1{,}2q$. $\Sigma=3{,}2q-1{,}2=2{,}64\Rightarrow q=1{,}2$, $r=20$.

17 Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Прямая касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B.

а) Докажите, что угол AKB прямой.

б) Найдите AK, если радиусы окружностей равны 36 и 64.

Ответ: б) $\dfrac{288}{5}$

Решение. а) Проведём через точку K общую касательную к окружностям; пусть она пересекает прямую AB в точке M. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны: $MA=MK$ и $MB=MK$. Значит, M — середина AB и $MK=\dfrac{AB}{2}$, то есть медиана треугольника AKB равна половине стороны AB. Поэтому $\angle AKB=90^\circ$.

б) Из прямоугольной трапеции O_1ABO_2: $AB^2=O_1O_2^2-(O_1A-O_2B)^2=(36+64)^2-(36-64)^2=4\cdot 36\cdot 64$, $AB=96$, $MA=MK=48$. Точки O_1 и M равноудалены от концов отрезка AK, поэтому $O_1M\perp AK$, и AK вдвое больше высоты прямоугольного треугольника O_1AM, проведённой из вершины A: $O_1M=\sqrt{36^2+2304}=60$, $AK=2\cdot\dfrac{O_1A\cdot AM}{O_1M}=2\cdot\dfrac{36\cdot 48}{60}=\dfrac{288}{5}$.

Ответ: б) $\dfrac{288}{5}$.

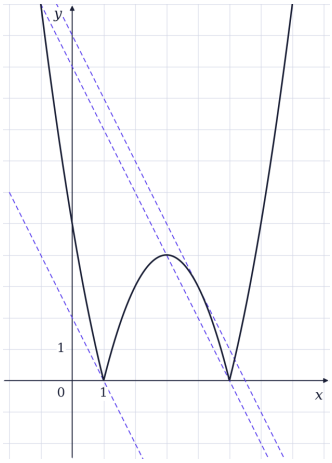
18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-6x+5\right| = -2x+a$$

имеет ровно 4 различных корня.

Ответ: $a \in (10;\,11)$

Решение. Число корней уравнения равно числу общих точек графика $y=\left|x^2-6x+5\right|$ и прямой $y=-2x+a$ (угловой коэффициент -2). Поскольку $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$, график состоит из трёх частей: ветви параболы $y=x^2-6x+5$ при $x\leqslant 1$, ветви той же параболы при $x\geqslant 5$ и дуги $y=-(x^2-6x+5)$ при $1<x<5$.



Граничные положения прямой. Прямая проходит через точку $(1;\,0)$ при $a=2$ и через точку $(5;\,0)$ при $a=10$.

Касание с дугой: уравнение $-(x^2-6x+5)=-2x+a$, то есть $x^2-8x+5+a=0$, имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю: $a=11$; точка касания $x=4$ лежит в интервале $(1;\,5)$.

Прямая с угловым коэффициентом -2 касается параболы $y=x^2-6x+5$ в точке $x=2$, которая не принадлежит крайним ветвям, поэтому касания с ветвями нет.

Перемещая прямую снизу вверх (с ростом a) и подсчитывая общие точки с графиком, получаем:

a	$a<2$	2	$(2;\,10)$	10	$(10;\,11)$	11	$a>11$
Число корней	0	1	2	3	4	3	2

Ровно 4 корня получается при $a\in(10;\,11)$.

Ответ: $a\in(10;\,11)$.

19

Положительные целые числа x, y, z в сумме дают 10.

а) Возможна ли тройка (1;1;8)?

б) Могут ли все три числа быть не меньше 4?

в) Сколько существует упорядоченных троек (x,y,z)?

Ответ: а) да; б) нет; в) 36

Решение. Тройка (1;1;8) подходит. Если каждое число не меньше 4, сумма не меньше 12, что невозможно. Размещаем два разделителя в девяти промежутках между десятью единицами: $C(9,2)=36$ упорядоченных положительных троек.