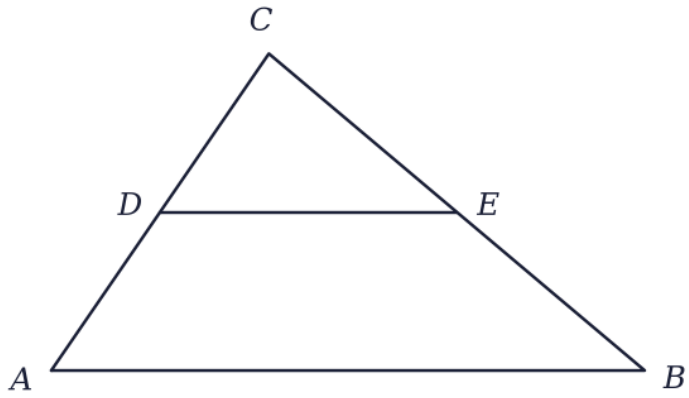
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 Площадь треугольника ABC равна 72, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь треугольника CDE.



Ответ: 18

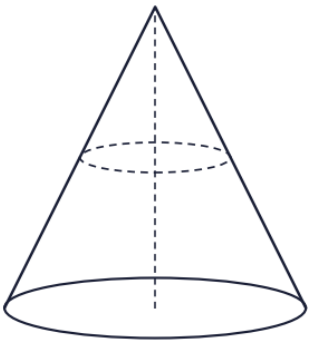
Решение. Треугольник CDE подобен треугольнику CAB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, поэтому его площадь в 4 раза меньше: $\frac{72}{4} = 18$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(-5;\ 3)$ и $\vec{b}\,(-5;\ -3)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: 16

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5 \cdot (-5) + 3 \cdot (-3) = 16$.

3 Объём конуса равен 64. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.



Ответ: 8

Решение. Меньший конус подобен исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$, объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия: $V' = \frac{64}{8} = 8$.

4 В среднем из 200 блендеров, поступивших в продажу, 2 неисправны. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля прибор исправен.

Ответ: 0,99

Решение. $P = \frac{200 - 2}{200} = 0{,}99$.

5 Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 30% этих стёкол, вторая — 70%. Первая фабрика выпускает 4% бракованных стёкол, а вторая — 5%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ: 0,047

Решение. По формуле полной вероятности: $P = 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}7 \cdot 0{,}05 = 0{,}047$.

6 Решите уравнение $\cos \frac{\pi(x+5)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Ответ: -4

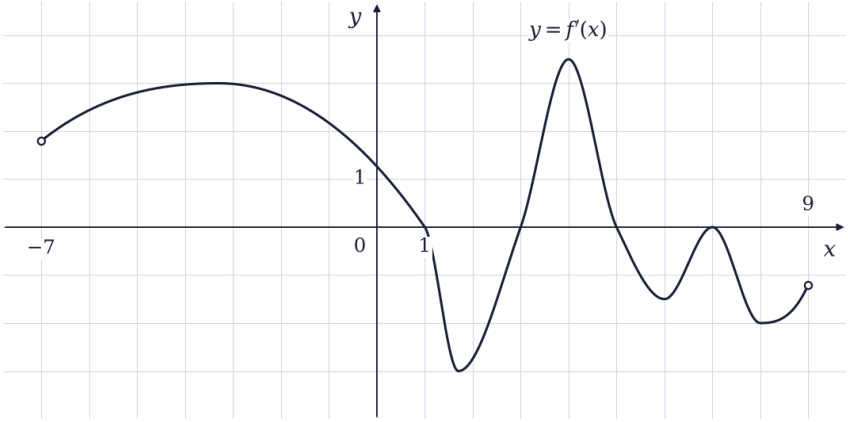
Решение. Решения: $x + 5 = 1 + 6k, x + 5 = -1 + 6k, k \in \mathbb{Z}$. Перебором k находим наибольший отрицательный корень: $x = -4$.

7 Найдите значение выражения $4\operatorname{tg}20^\circ \cdot \operatorname{tg}110^\circ$.

Ответ: -4

Решение. $\operatorname{tg}110^\circ = -\operatorname{ctg}20^\circ$, а $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, поэтому выражение равно -4.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7;\ 9)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 3

Решение. Точки экстремума — нули производной, в которых она меняет знак: $1;\ 3;\ 5$. В точке 7 график f' касается оси абсцисс без смены знака, это не экстремум. Всего 3.

9 Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 20$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 4$ м/с². За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 42 метров. Ответ дайте в секундах.

Ответ: 3

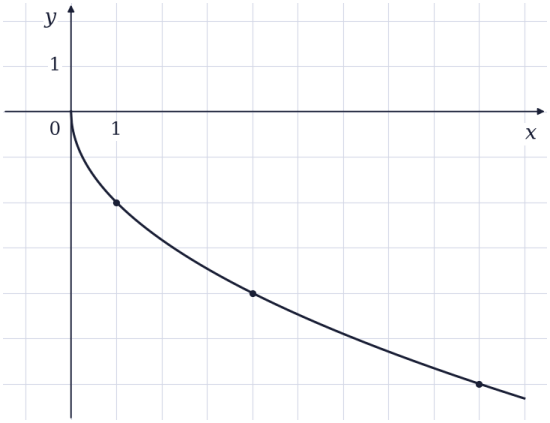
Решение. $20t - \dfrac{4t^2}{2} = 42 \iff t^2 - 10t + 21 = 0$. Корни: $t = 3$ и $t = 7$. Торможение длится $\dfrac{v_0}{a} = 5$ с, поэтому подходит $t = 3$.

10 Два велосипедиста одновременно отправились в 240-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 6 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 24

Решение. Пусть v — скорость второго. $\dfrac{240}{v}-\dfrac{240}{v+6}=2 \iff 2v^2+12v-1440=0$, положительный корень $v=24$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x)=k\sqrt{x}$. Найдите $f(25)$.



Ответ: -10

Решение. График проходит через точку $(9;\ -6)$: $-6=k\sqrt{9}$, $k=-2$. $f(25)=-2\cdot\sqrt{25}=-10$.

12 Найдите точку максимума функции y = (x − 4)^3 − 75(x − 4) + 64.

Ответ: -1

Решение. Производная y′ = 3((x − 4)^2 − 25). Она равна нулю при x = -1 и x = 9. Знаки производной на трёх промежутках: +, −, +. Поэтому точка максимума x = -1, точка минимума x = 9. Ответ: -1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $2\cos^2 x+3\sin(\pi+x)=2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$**; б)** $3\pi;\ 4\pi$

Решение. а) По формуле приведения $\sin(\pi+x)=-\sin x$, а $\cos^2 x=1-\sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$2\left(1-\sin^2 x\right)-3\sin x=2 \iff 2\sin^2 x+3\sin x=0.$$

Отсюда $\sin x=0$ или $\sin x=-1{,}5$. Уравнение $\sin x=-1{,}5$ корней не имеет, так как $|-1{,}5|>1$.

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$\dfrac{5\pi}{2} \leqslant \pi k \leqslant 4\pi \iff \dfrac{5}{2} \leqslant k \leqslant 4, k \in \{3, 4\}$: $x = 3\pi, x = 4\pi$.

Ответ: а) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) 3π; 4π.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 4 на ребре CC_1 отмечена точка M так, что M — середина ребра CC_1.

а) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости ACC_1.

б) Найдите угол между плоскостью BDM и плоскостью $ABCD$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Решение. а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD \perp AC$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1 \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, значит, $BD \perp (ACC_1)$. Плоскость BDM проходит через прямую BD, перпендикулярную плоскости ACC_1, поэтому плоскости BDM и ACC_1 перпендикулярны.

б) Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Прямая OM лежит в плоскости ACC_1, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$; кроме того, $OC \perp BD$. Значит, $\angle MOC$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями BDM и $ABCD$. $OC = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, $CM = 2$, $\operatorname{tg}\angle MOC = \dfrac{CM}{OC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

15 Решите неравенство

$$\log_3^2 x - \log_3 x - 6 \leqslant 0.$$

Ответ: $\left[\dfrac{1}{9};\ 27\right]$

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Сделаем замену $t = \log_3 x$: $t^2 - t - 6 \leqslant 0 \iff (t+2)(t-3) \leqslant 0 \iff -2 \leqslant t \leqslant 3$.

Функция $y = \log_3 x$ возрастает, поэтому $-2 \leqslant \log_3 x \leqslant 3 \iff \dfrac{1}{9} \leqslant x \leqslant 27$.

Ответ: $\left[\dfrac{1}{9};\ 27\right]$.

16 Кредит 4,31 млн руб. на 3 года под 10 % (стандартная схема). Первые два платежа равны X, третий равен $2X$. Найдите общую сумму выплат.

Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 5 324 000 руб.

Решение. $4{,}31 \cdot 1{,}331 = X \cdot 1{,}21 + X \cdot 1{,}1 + 2X = 4{,}31X \Rightarrow X = 1{,}331$. $\Sigma = 4X = 5{,}324$ млн руб.

17 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD.

а) Докажите, что $AB = 2AD$.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AD = 10$, $AK = 12$.

Ответ: б) 192

Решение. а) Прямые AB и CD параллельны, поэтому $\angle AKD = \angle KAB$ как накрест лежащие углы. AK — биссектриса, поэтому $\angle KAB = \angle KAD$. Значит, $\angle AKD = \angle KAD$, и треугольник ADK равнобедренный: $DK = AD$. Аналогично треугольник BCK равнобедренный: $CK = BC = AD$. Тогда $AB = CD = DK + KC = 2AD$.

б) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к стороне AB, равна 180°, поэтому $\angle KAB + \angle KBA = 90^\circ$ и $\angle AKB = 90^\circ$. Треугольник ABK и параллелограмм имеют общее основание AB и одинаковую высоту (расстояние между прямыми AB и CD), поэтому $S_{ABCD} = 2S_{ABK} = AK \cdot BK$. По пункту а) $AB = 2AD = 20$. Из прямоугольного треугольника ABK: $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$. $S_{ABCD} = 12 \cdot 16 = 192$.

Ответ: б) 192.

18 Найдите все a, при которых парабола $y=x^2$ и прямая $y=ax-1$ имеют ровно одну общую точку.

Ответ: $a \in \{-2; 2\}$

Решение. Абсциссы общих точек удовлетворяют $x^2-ax+1=0$. Ровно одна точка соответствует нулевому дискриминанту $a^2-4=0$, то есть $a=-2$ или $a=2$.

19 Для трёхзначного натурального числа сумма цифр равна 18.

а) Может ли число равняться 999?

б) Может ли число равняться 981?

в) Найдите наибольшее такое число.

Ответ: а) нет; б) да; в) 990

Решение. У 999 сумма цифр 27, у 981 — 9+8+1=18. Чтобы получить наибольшее трёхзначное число, сначала берём максимально возможную сотню 9, затем максимально возможный десяток 9; оставшаяся единица равна 0. Число 990 имеет сумму цифр 18.