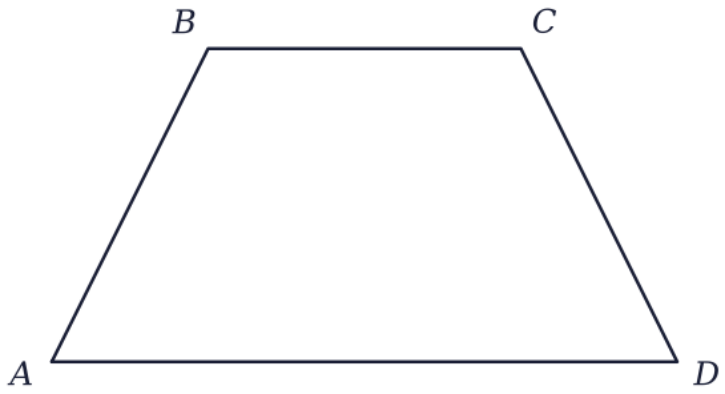
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 20 и 10 соответственно, а боковая сторона равна 13. Найдите площадь трапеции.



Ответ: 180

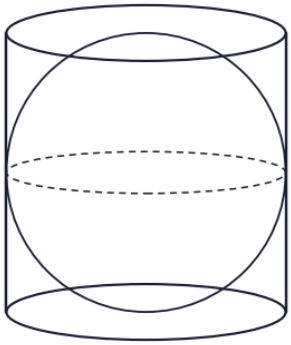
Решение. Проекция боковой стороны на большее основание равна $\dfrac{20-10}{2}=5$, высота $h=\sqrt{13^2-5^2}=12$, $S=\dfrac{20+10}{2}\cdot 12=180$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(1;\,-3)$ и $\vec{b}\,(2;\,-3)$. Найдите длину вектора $2\vec{a}+3\vec{b}$.

Ответ: 17

Решение. $2\vec{a}+3\vec{b}=(8;\,-15)$, $|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{64+225}=17$.

3 В цилиндр вписан шар: шар касается обоих оснований цилиндра и его боковой поверхности. Объём цилиндра равен 63. Найдите объём шара.



Ответ: 42

Решение. Высота цилиндра равна диаметру шара: $V_{\text{цил}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 63$, откуда $\pi r^3 = 31{,}5$; $V_{\text{шара}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 42$.

4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют 5 спортсменов из Финляндии, 11 спортсменов из Дании и 9 спортсменов из Швеции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Ответ: 0,36

Решение. Всего спортсменов $5 + 11 + 9 = 25$, $P = \dfrac{9}{25} = 0{,}36$.

5 Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,3, второго — 0,7. Найдите вероятность того, что в мишень попадёт ровно один стрелок.

Ответ: 0,58

Решение. Ровно одно попадание: первый попал, второй нет, или наоборот. $P = 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}58$.

6 Решите уравнение $\cos \dfrac{\pi(x+9)}{3} = \dfrac{1}{2}$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Ответ: -2

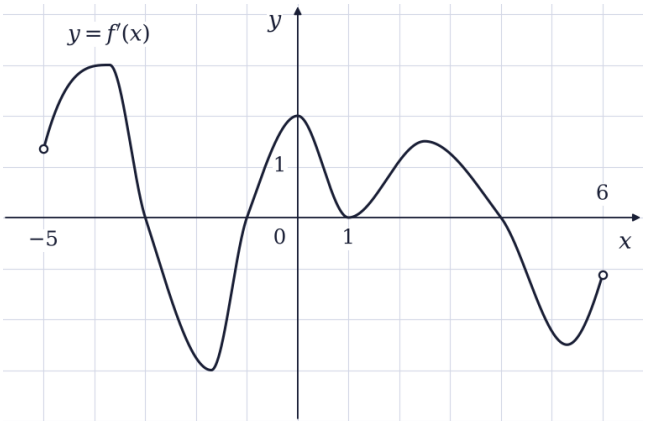
Решение. Решения: $x + 9 = 1 + 6k$, $x + 9 = -1 + 6k$, $k \in \mathbb{Z}$. Перебором k находим наибольший отрицательный корень: $x = -2$.

7 Найдите значение выражения $\dfrac{24\sin 10^\circ}{\sin 5^\circ \cdot \sin 85^\circ}$.

Ответ: 48

Решение. $\sin 85^\circ = \cos 5^\circ$, а $\sin 10^\circ = 2\sin 5^\circ \cos 5^\circ$, поэтому выражение равно $24 \cdot 2 = 48$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 1

Решение. В точке минимума производная меняет знак с «−» на «+». Такая точка одна: $x = -1$.

9 Масса радиоактивного изотопа в образце уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа (в мг), t — время, прошедшее от начального момента (в минутах), T — период полураспада (в минутах). Начальная масса изотопа $m_0 = 200$ мг, период полураспада $T = 10$ мин. Через сколько минут масса изотопа станет равной 50 мг?

Ответ: 20

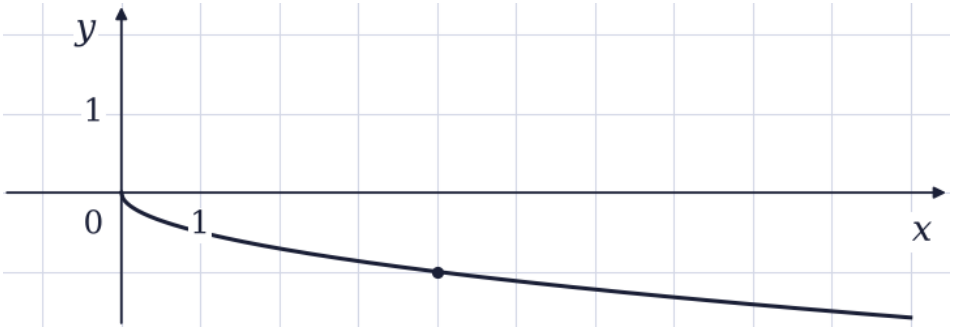
Решение. $200 \cdot 2^{-t/10} = 50 \iff 2^{-t/10} = 2^{-2} \iff t = 20$.

10 Два велосипедиста одновременно отправились в 120-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 5 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 15

Решение. Пусть v — скорость второго. $\dfrac{120}{v} - \dfrac{120}{v+5} = 2 \iff 2v^2 + 10v - 600 = 0$, положительный корень $v = 15$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(100)$.



Ответ: -5

Решение. График проходит через точку $(4;\ -1)$: $-1 = k\sqrt{4}$, $k = -0{,}5$. $f(100) = -0{,}5 \cdot \sqrt{100} = -5$.

12 Найдите точку минимума функции $y = (x - 4)^3 - 75(x - 4) + 61$.

Ответ: 9

Решение. Производная $y' = 3((x - 4)^2 - 25)$. Она равна нулю при x = -1 и x = 9. Знаки производной на трёх промежутках: +, −, +. Поэтому точка максимума x = -1, точка минимума x = 9. Ответ: 9.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $2\cos^2 x - 5\sin(\pi - x) = 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\ 0\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; **б)** $-\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{6}$

Решение. а) По формуле приведения $\sin(\pi - x) = \sin x$, а $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$2\left(1 - \sin^2 x\right) - 5\sin x = 4 \iff 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0.$$

Отсюда $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ или $\sin x = -2$. Уравнение $\sin x = -2$ корней не имеет, так как $|-2| > 1$.

Если $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, то $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\ 0\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$-\dfrac{3\pi}{2} \leqslant -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant 0 \iff -\dfrac{2}{3} \leqslant k \leqslant \dfrac{1}{12}, k \in \{0\}\colon x = -\dfrac{\pi}{6}.$
$-\dfrac{3\pi}{2} \leqslant -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant 0 \iff -\dfrac{1}{3} \leqslant n \leqslant \dfrac{5}{12}, n \in \{0\}\colon x = -\dfrac{5\pi}{6}.$
Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}; -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{6}$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 на ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости ACC_1.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью BDM.

Ответ: б) $24\sqrt{11}$

Решение. а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD \perp AC$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1 \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, значит, $BD \perp (ACC_1)$. Плоскость BDM проходит через прямую BD, перпендикулярную плоскости ACC_1, поэтому плоскости BDM и ACC_1 перпендикулярны.

б) Точка M лежит на ребре CC_1, поэтому плоскость BDM пересекает грани куба по отрезкам BD, BM и DM, и сечение — треугольник BDM. Пусть O — центр квадрата $ABCD$; прямая OM лежит в плоскости ACC_1, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$, и OM — высота треугольника BDM. $OC = \dfrac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$, $CM = 4$, $OM = \sqrt{OC^2 + CM^2} = \sqrt{72 + 16} = 2\sqrt{22}$, $BD = 12\sqrt{2}$. $S_{BDM} = \dfrac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{22} = 24\sqrt{11}$.

Ответ: б) $24\sqrt{11}$.

15 Решите неравенство

$$\log_3^2 x - 2\log_3 x \geqslant 0.$$

Ответ: $(0;\ 1] \cup [9;\ +\infty)$

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Сделаем замену $t = \log_3 x$: $t^2 - 2t \geqslant 0 \iff t(t-2) \geqslant 0 \iff t \leqslant 0$ или $t \geqslant 2$.

Функция $y = \log_3 x$ возрастает, поэтому $\log_3 x \leqslant 0 \iff 0 < x \leqslant 1$, $\log_3 x \geqslant 2 \iff x \geqslant 9$.

Ответ: $(0;\ 1] \cup [9;\ +\infty)$.

16 15 января взят кредит 1,1 млн руб. на 21 месяц под 3 % в месяц. 15-го числа с 1-го по 20-й месяц долг уменьшается на одну и ту же сумму, 15-го числа 20-го месяца он равен 300 тыс. руб., к 15-му числу 21-го месяца кредит погашен. Найдите общую сумму выплат.

Ответ: 1 541 000 руб.

Решение. Уменьшение $d=(1{,}1-0{,}3)/20=0{,}04$. Долги под проценты: $1{,}1;\ 1{,}06;\ \ldots;\ 0{,}34$ (сумма $14{,}4$) и $0{,}3$ в 21-й месяц. Проценты $0{,}03\cdot 14{,}7=0{,}441$. $\Sigma=1{,}541$ млн руб.

17 Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Прямая касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B.

а) Докажите, что угол AKB прямой.

б) Найдите AK, если радиусы окружностей равны 48 и 27.

Ответ: б) $\dfrac{288}{5}$

Решение. а) Проведём через точку K общую касательную к окружностям; пусть она пересекает прямую AB в точке M. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны: $MA=MK$ и $MB=MK$. Значит, M — середина AB и $MK=\dfrac{AB}{2}$, то есть медиана треугольника AKB равна половине стороны AB. Поэтому $\angle AKB=90^\circ$.

б) Из прямоугольной трапеции O_1ABO_2: $AB^2=O_1O_2^2-(O_1A-O_2B)^2=(48+27)^2-(48-27)^2=4\cdot 48\cdot 27$, $AB=72$, $MA=MK=36$. Точки O_1 и M равноудалены от концов отрезка AK, поэтому $O_1M\perp AK$, и AK вдвое больше высоты прямоугольного треугольника O_1AM, проведённой из вершины A: $O_1M=\sqrt{48^2+1296}=60$, $AK=2\cdot\dfrac{O_1A\cdot AM}{O_1M}=2\cdot\dfrac{48\cdot 36}{60}=\dfrac{288}{5}$.

Ответ: б) $\dfrac{288}{5}$.

18 Найдите все a, при которых оба корня уравнения $x^2-2ax+a^2-1=0$ лежат на отрезке $[0;3]$.

Ответ: $a\in[1;2]$

Решение. Уравнение имеет два различных корня $a-1$ и $a+1$. Оба входят в $[0;3]$ тогда и только тогда, когда $a-1\ge 0$ и $a+1\le 3$, то есть $1\le a\le 2$.

19 В двоичной записи длины пять соседние единицы запрещены; нули слева разрешены.

а) Подходит ли запись 10101?

б) Подходит ли запись 11100?

в) Сколько всего подходящих записей?

Ответ: а) да; б) нет; в) 13

Решение. Запись 10101 не содержит соседних единиц, 11100 содержит. Обозначим количество записей длины n через f(n). Если первый символ 0, остаётся f(n−1) вариантов; если 1, за ним обязательно 0 и остаётся f(n−2) вариантов. Поэтому f(n)=f(n−1)+f(n−2), f(0)=1, f(1)=2. Получаем f(2)=3, f(3)=5, f(4)=8, f(5)=13.