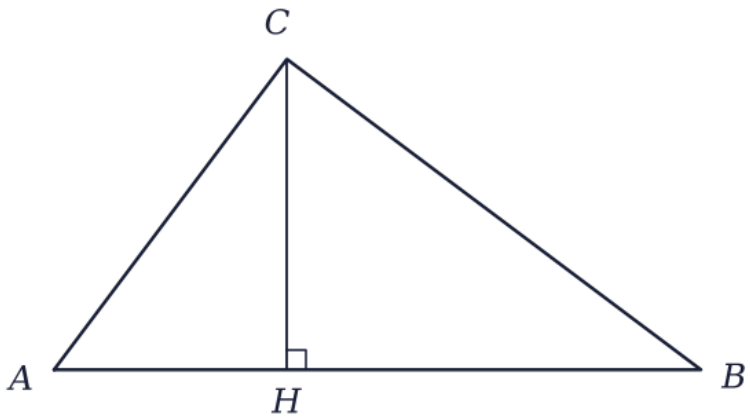
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AH = 9$, $BH = 16$. Найдите CH.



Ответ: 12

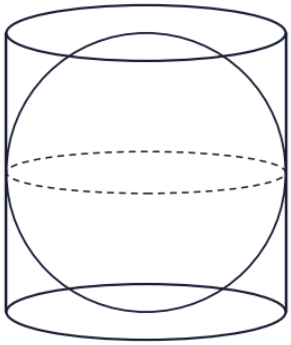
Решение. Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, есть среднее пропорциональное отрезков гипотенузы: $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(5;\ -3)$ и $\vec{b}\,(-2;\ 3)$. Найдите длину вектора $4\vec{a} - 2\vec{b}$.

Ответ: 30

Решение. $4\vec{a} - 2\vec{b} = (24;\ -18)$, $|4\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{576 + 324} = 30$.

3 В цилиндр вписан шар: шар касается обоих оснований цилиндра и его боковой поверхности. Объём цилиндра равен 66. Найдите объём шара.



Ответ: 44

Решение. Высота цилиндра равна диаметру шара: $V_{\text{цил}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 66$, откуда $\pi r^3 = 33$; $V_{\text{шара}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 44$.

4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют 7 спортсменов из Финляндии, 11 спортсменов из Дании и 12 спортсменов из Швеции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Ответ: 0,4

Решение. Всего спортсменов $7 + 11 + 12 = 30$, $P = \dfrac{12}{30} = 0{,}4$.

5 Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,2, второго — 0,2. Найдите вероятность того, что в мишень попадёт ровно один стрелок.

Ответ: 0,32

Решение. Ровно одно попадание: первый попал, второй нет, или наоборот. $P = 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}32$.

6 Найдите корень уравнения $3^{x+1} = 27$.

Ответ: 2

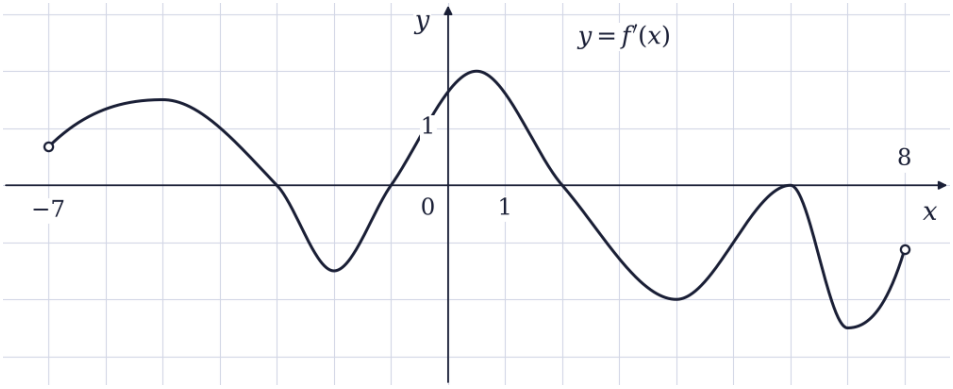
Решение. $27 = 3^3$, поэтому $x + 1 = 3$, $x = 2$.

7 Найдите значение выражения $12\,\mathrm{tg}\,30^\circ \cdot \mathrm{tg}\,120^\circ$.

Ответ: -12

Решение. $\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{ctg} 30^\circ$, а $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, поэтому выражение равно -12.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7;\ 8)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: 4

Решение. Функция возрастает там, где $f'(x) > 0$ (касание оси без смены знака промежуток не разрывает): $(-7;\ -3)$, $(-1;\ 2)$. Наибольшая длина равна 4.

9 Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 18$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 2$ м/с². За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 32 метров. Ответ дайте в секундах.

Ответ: 2

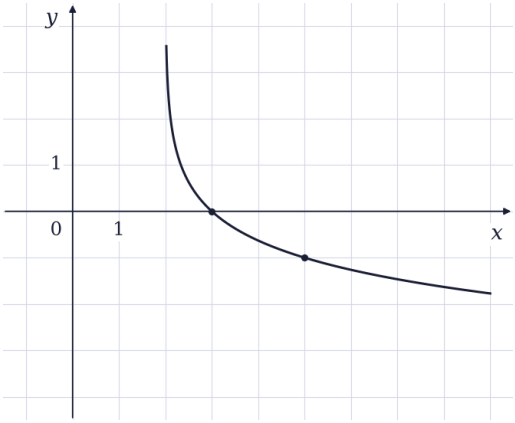
Решение. $18t - \dfrac{2t^2}{2} = 32 \iff t^2 - 18t + 32 = 0$. Корни: $t = 2$ и $t = 16$. Торможение длится $\dfrac{v_0}{a} = 9$ с, поэтому подходит $t = 2$.

10 Смешав 5-процентный и 80-процентный растворы кислоты и добавив 5 кг чистой воды, получили 22-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 5 кг воды добавили 5 кг 60-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 34-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 5-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: 14

Решение. Пусть x кг — масса 5-процентного раствора, y кг — 80-процентного. Тогда $0{,}05x + 0{,}8y = 0{,}22(x + y + 5)$ и $0{,}05x + 0{,}8y + 3 = 0{,}34(x + y + 5)$. Вычитая, получим $x + y + 5 = 25$, откуда $x = 14$, $y = 6$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = -\log_a(x+b)$. Найдите $f(83)$.



Ответ: -4

Решение. $\log_a(x+b) = 0$ при $x+b=1$; график пересекает ось абсцисс в точке $x=3$, поэтому $b=-2$. По точке $(5;\ -1)$ находим $a=3$. $f(83) = -\log_3 81 = -4$.

12 Найдите наибольшее значение функции y = (x − 3)^3 − 48(x − 3) + 58 на отрезке [-5; 7].

Ответ: 186

Решение. Производная y′ = 3((x − 3)^2 − 16); критические точки x = -1, x = 7. На концах отрезка y(-5) = -70, y(7) = -70. Во внутренней критической точке y(-1) = 186. Наибольшее значение: 186.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x - 4\sin(x-\pi) = -5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$**; б)** $\dfrac{3\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\sin(x-\pi) = -\sin x$, а $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 4\sin x = -5 \iff \sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0.$$

Отсюда $\sin x = -1$ или $\sin x = 3$. Уравнение $\sin x = 3$ корней не имеет, так как $|3| > 1$. Если $\sin x = -1$, то $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$\pi \leqslant -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant \dfrac{5\pi}{2} \iff \dfrac{3}{4} \leqslant k \leqslant \dfrac{3}{2}, k \in \{1\}$: $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{3\pi}{2}$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 4, боковое ребро равно 13. Точка M — середина ребра SC.

а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости SAC.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BDM.

Ответ: б) $13\sqrt{2}$

Решение. а) Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Диагонали квадрата перпендикулярны: $BD \perp AC$. Пирамида правильная, поэтому её высота — отрезок SO, и $SO \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и SO плоскости SAC, значит, $BD \perp (SAC)$.

б) Плоскость BDM пересекает пирамиду по треугольнику BDM. Отрезок OM — средняя линия треугольника SAC: $OM = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{13}{2}$. Прямая OM лежит в плоскости SAC, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$, то есть OM — высота треугольника BDM. $BD = 4\sqrt{2}$, $S_{BDM} = \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \dfrac{13}{2} = 13\sqrt{2}$.

Ответ: б) $13\sqrt{2}$.

15 Решите неравенство

$$\frac{4^x - 3 \cdot 2^x + 2}{\log_5(x+4)} \geqslant 0.$$

Ответ: $(-3;\ 0] \cup [1;\ +\infty)$

Решение. Область допустимых значений: $x + 4 > 0$ и $\log_5(x+4)\ /\ 0$, то есть $x > -4$, $x\ /\ = -3$.

Числитель раскладывается на множители: $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = (2^x - 1)(2^x - 2)$.

Функции $y = 2^t$ и $y = \log_5 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак $2^x - 1$ совпадает со знаком x, знак $2^x - 2$ — со знаком $x - 1$, знак $\log_5(x+4) = \log_5(x+4) - \log_5 1$ — со знаком $x + 3$.

Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{x(x-1)}{x+3} \geqslant 0, \quad x > -4.$$

Метод интервалов: на $(-4;\ -3)$ дробь отрицательна; на $(-3;\ 0)$ дробь положительна; на $(0;\ 1)$ дробь отрицательна; на $(1;\ +\infty)$ дробь положительна; в точках $x = 0$, $x = 1$ числитель равен нулю.

Ответ: $(-3;\ 0] \cup [1;\ +\infty)$.

16 Кредит S взят 15 января на 3 месяца, 1-го числа долг растёт на 2 %. Долг на 15-е число: 15.02 — 60 %, 15.03 — 30 %, 15.04 — 0 % от S. Последний платёж 612 000 руб. Найдите S.

Ответ: 2 000 000 руб.

Решение. Последний платёж $= 0{,}3S \cdot 1{,}02 = 0{,}306S = 612\,000 \Rightarrow S = 2\,000\,000$ руб.

17 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ACH и BCH соответственно.

а) Докажите, что $O_1O_2 = r\sqrt{2}$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

б) Найдите O_1O_2, если $AC = 8$, $BC = 15$.

Ответ: б) $3\sqrt{2}$

Решение. а) Треугольники ACH и ABC подобны (прямоугольные, с общим острым углом A), коэффициент подобия $\dfrac{AC}{AB}$; треугольники BCH и ABC подобны с коэффициентом $\dfrac{BC}{AB}$. Поэтому радиусы вписанных окружностей равны $r_1 = r \cdot \dfrac{AC}{AB}$ и $r_2 = r \cdot \dfrac{BC}{AB}$.

Центр вписанной окружности лежит на биссектрисе угла, поэтому HO_1 и HO_2 — биссектрисы прямых углов AHC и BHC: $\angle O_1HC = \angle O_2HC = 45^\circ$, $\angle O_1HO_2 = 90^\circ$. Расстояние от O_1 до сторон угла AHC равно r_1, поэтому $HO_1 = r_1\sqrt{2}$; аналогично $HO_2 = r_2\sqrt{2}$.

По теореме Пифагора $O_1O_2^2 = 2r_1^2 + 2r_2^2 = 2r^2 \cdot \dfrac{AC^2 + BC^2}{AB^2} = 2r^2$, то есть $O_1O_2 = r\sqrt{2}$.

б) $AB = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник: $r = \dfrac{AC + BC - AB}{2} = \dfrac{8 + 15 - 17}{2} = 3$. По пункту а) $O_1O_2 = 3\sqrt{2}$.

Ответ: б) $3\sqrt{2}$.

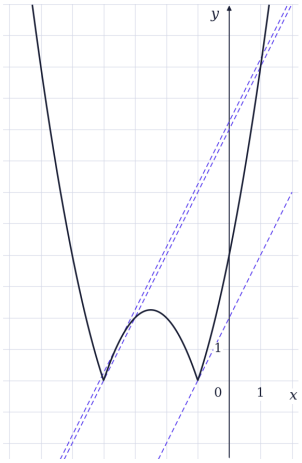
18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 + 5x + 4\right| = 2x + a$$

имеет ровно 2 различных корня.

Ответ: $a \in (2;\ 8) \cup (8{,}25;\ +\infty)$

Решение. Число корней уравнения равно числу общих точек графика $y = \left|x^2 + 5x + 4\right|$ и прямой $y = 2x + a$ (угловой коэффициент 2). Поскольку $x^2 + 5x + 4 = (x + 4)(x + 1)$, график состоит из трёх частей: ветви параболы $y = x^2 + 5x + 4$ при $x \leqslant -4$, ветви той же параболы при $x \geqslant -1$ и дуги $y = -(x^2 + 5x + 4)$ при $-4 < x < -1$.



Граничные положения прямой. Прямая проходит через точку $(-4;\ 0)$ при $a = 8$ и через точку $(-1;\ 0)$ при $a = 2$.

Касание с дугой: уравнение $-(x^2 + 5x + 4) = 2x + a$, то есть $x^2 + 7x + 4 + a = 0$, имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю: $a = 8{,}25$; точка касания $x = -3{,}5$ лежит в интервале $(-4;\ -1)$.

Прямая с угловым коэффициентом 2 касается параболы $y = x^2 + 5x + 4$ в точке $x = -1{,}5$, которая не принадлежит крайним ветвям, поэтому касания с ветвями нет.

Перемещая прямую снизу вверх (с ростом a) и подсчитывая общие точки с графиком, получаем:

a	$a < 2$	2	$(2;\ 8)$	8	$(8;\ 8{,}25)$	$8{,}25$	$a > 8{,}25$
Число корней	0	1	2	3	4	3	2

Ровно 2 корня получается при $a \in (2;\ 8) \cup (8{,}25;\ +\infty)$.

Ответ: $a \in (2;\ 8) \cup (8{,}25;\ +\infty)$.

19

Три различных натуральных числа имеют сумму 20.

а) Может ли их произведение равняться 280?

б) Может ли оно равняться 300?

в) Найдите наибольшее возможное произведение.

Ответ: а) да; б) нет; в) 280

Решение. По неравенству между средними произведение не больше $(20/3)^3<300$, так что б) невозможно. Если два числа различаются хотя бы на 2 и замена меньшего на 1 больше, большего на 1 меньше не создаёт равенства с третьим числом, произведение возрастает. Достаточно проверить ближайшие к 20/3 тройки различных чисел: (5,7,8) даёт 280, (5,6,9) даёт 270, (4,7,9) даёт 252. Для строгой проверки максимума пусть a