Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 36 и 12 соответственно, а боковая сторона равна 13. Найдите площадь трапеции.



Ответ: 120

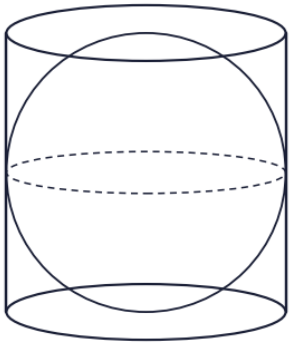
Решение. Проекция боковой стороны на большее основание равна $\dfrac{36-12}{2}=12$, высота $h=\sqrt{13^2-12^2}=5$, $S=\dfrac{36+12}{2}\cdot 5=120$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(-2;\,5)$ и $\vec{b}\,(-4;\,5)$. Найдите длину вектора $2\vec{a}+\vec{b}$.

Ответ: 17

Решение. $2\vec{a}+\vec{b}=(-8;\,15)$, $|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{64+225}=17$.

3 В цилиндр вписан шар: шар касается обоих оснований цилиндра и его боковой поверхности. Площадь полной поверхности цилиндра равна 93. Найдите площадь поверхности шара.



Ответ: 62

Решение. Высота цилиндра равна диаметру шара: $h = 2r$. $S_{\text{цил}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2 = 93$, откуда $\pi r^2 = 15{,}5$; $S_{\text{шара}} = 4\pi r^2 = 62$.

4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют 7 спортсменов из Финляндии, 6 спортсменов из Дании и 3 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Ответ: 0,1875

Решение. Всего спортсменов $7 + 6 + 3 = 16$, $P = \dfrac{3}{16} = 0{,}1875$.

5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,5. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первые три мишени и не попадёт в последнюю.

Ответ: 0,0625

Решение. Выстрелы независимы: $P = 0{,}5^3 \cdot 0{,}5 = 0{,}0625$.

6 Найдите корень уравнения $5^{x-6} = 125$.

Ответ: 9

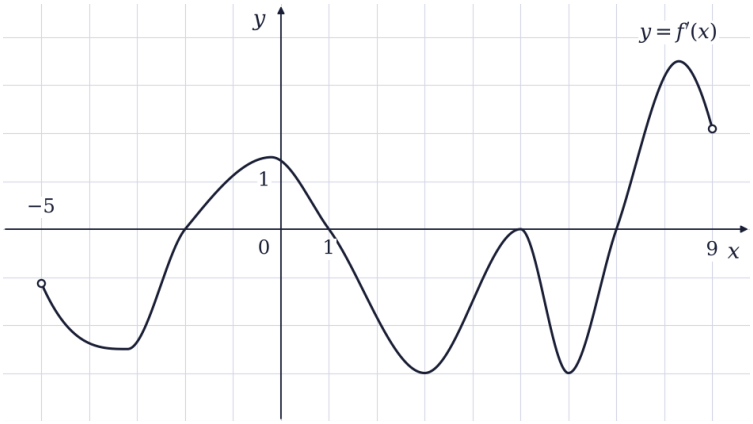
Решение. $125 = 5^3$, поэтому $x - 6 = 3$, $x = 9$.

7 Найдите значение выражения $\dfrac{6\sin 38^\circ}{\sin 19^\circ \cdot \sin 71^\circ}$.

Ответ: 12

Решение. $\sin 71^\circ = \cos 19^\circ$, а $\sin 38^\circ = 2\sin 19^\circ \cos 19^\circ$, поэтому выражение равно $6 \cdot 2 = 12$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 9)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 3

Решение. Точки экстремума — нули производной, в которых она меняет знак: $-2;\ 1;\ 7$. В точке 5 график f' касается оси абсцисс без смены знака, это не экстремум. Всего 3.

9 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 3 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 12$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}4$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 8,4 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: 6

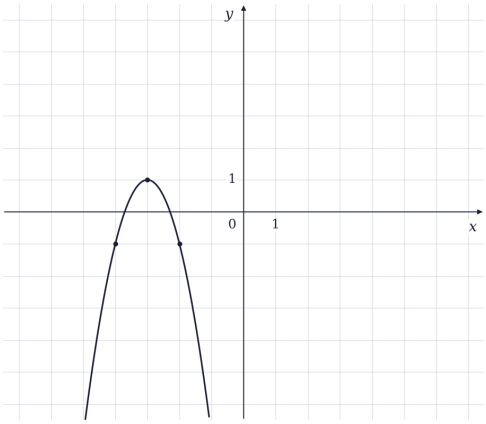
Решение. $RC = 3 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 6$. $8{,}4 = 1{,}4 \cdot 6 \cdot \log_2 \dfrac{12}{U}$, откуда $\log_2 \dfrac{12}{U} = 1$, $U = \dfrac{12}{2} = 6$.

10 Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 180 литров она заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба?

Ответ: 18

Решение. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{180}{x} - \dfrac{180}{x+2} = 1$, положительный корень $x = 18$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите значение $f(10)$.



Ответ: -337

Решение. Вершина параболы — точка $(-3;\ 1)$, поэтому $f(x) = a(x - (-3))^2 + 1$. По точке $(-2;\ -1)$: $a = -2$. $f(10) = -2 \cdot (10 - (-3))^2 + 1 = -337$.

12 Найдите точку максимума функции y = 4ln x − x + 55.

Ответ: 4

Решение. Область определения: x > 0. Производная y′ = 4/x − 1. Она положительна при 0 < x < 4 и отрицательна при x > 4. Точка максимума x = 4.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x + 7 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; **б)** $-\frac{7\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3}$

Решение. а) По формуле приведения $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$, а $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Уравнение принимает вид

$$\left(2\cos^2 x - 1\right) - 7\cos x = -4 \iff 2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0.$$

Отсюда $\cos x = \dfrac{1}{2}$ или $\cos x = 3$. Уравнение $\cos x = 3$ корней не имеет, так как $|3| > 1$.

Если $\cos x = \dfrac{1}{2}$, то $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\dfrac{3\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$-3\pi \leqslant \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant -\dfrac{3\pi}{2} \iff -\dfrac{5}{3} \leqslant k \leqslant -\dfrac{11}{12}, k \in \{-1\}\colon x = -\dfrac{5\pi}{3}.$

$-3\pi \leqslant -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant -\dfrac{3\pi}{2} \iff -\dfrac{4}{3} \leqslant n \leqslant -\dfrac{7}{12}, n \in \{-1\}\colon x = -\dfrac{7\pi}{3}.$

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{3}$; $-\dfrac{5\pi}{3}$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 12, боковое ребро равно 10.

а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости SAC.

б) Найдите угол между прямой SB и плоскостью SAC.

Ответ: б) $\arcsin \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$

Решение. а) Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Диагонали квадрата перпендикулярны: $BD \perp AC$. Пирамида правильная, поэтому её высота — отрезок SO, и $SO \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и SO плоскости SAC, значит, $BD \perp (SAC)$.

б) По пункту а) $BO \perp (SAC)$, поэтому SO — проекция прямой SB на плоскость SAC, и искомый угол равен $\angle BSO$. В прямоугольном треугольнике BSO: $BO = \dfrac{12\sqrt{2}}{2}$, $SB = 10$, $\sin \angle BSO = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: б) $\arcsin \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

15 Решите неравенство

$$\frac{9^x - 4 \cdot 3^x + 3}{\log_2(x+4)} \geqslant 0.$$

Ответ: $(-3;\ 0] \cup [1;\ +\infty)$

Решение. Область допустимых значений: $x + 4 > 0$ и $\log_2(x+4)\ /\ 0$, то~есть $x > -4$, $x\ /\ = -3$.

Числитель раскладывается на множители: $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = (3^x - 1)(3^x - 3)$.

Функции $y = 3^t$ и $y = \log_2 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак $3^x - 1$ совпадает со знаком x, знак $3^x - 3$ — со знаком $x - 1$, знак $\log_2(x+4) = \log_2(x+4) - \log_2 1$ — со знаком $x + 3$.

Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{x(x-1)}{x+3}\geqslant 0,\quad x>-4.$$

Метод интервалов: на $(-4;\,-3)$ дробь отрицательна; на $(-3;\,0)$ дробь положительна; на $(0;\,1)$ дробь отрицательна; на $(1;\,+\infty)$ дробь положительна; в точках $x=0$, $x=1$ числитель равен нулю.
Ответ: $(-3;\,0]\cup[1;\,+\infty)$.

16

15 января взят кредит 2 млн руб. (1-го числа долг растёт на r %, со 2-го по 14-е — платёж). Долг на 15-е число:

Дата	**15.01**	**15.02**	**15.03**	**15.04**	**15.05**	**15.06**
Долг, % от кредита	100	95	85	65	35	0

Общая сумма выплат 2 380 000 руб. Найдите r.

Ответ: 5 %

Решение. Сумма долгов $100+95+85+65+35=380\,\%$. $2\left(1+\dfrac{3{,}8r}{100}\right)=2{,}38\Rightarrow r=5$.

17

Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Прямая касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B.
а) Докажите, что угол AKB прямой.
б) Найдите площадь треугольника AKB, если радиусы окружностей равны 64 и 36.

Ответ: б) $\dfrac{55296}{25}$

Решение. а) Проведём через точку K общую касательную к окружностям; пусть она пересекает прямую AB в точке M. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны: $MA=MK$ и $MB=MK$. Значит, M — середина AB и $MK=\dfrac{AB}{2}$, то есть медиана треугольника AKB равна половине стороны AB. Поэтому $\angle AKB=90^\circ$.
б) Из прямоугольной трапеции O_1ABO_2: $AB^2=O_1O_2^2-(O_1A-O_2B)^2=(64+36)^2-(64-36)^2=4\cdot 64\cdot 36$, $AB=96$, $MA=MK=48$. Точки O_1 и M равноудалены от концов отрезка AK, поэтому $O_1M\perp AK$, и AK вдвое больше высоты прямоугольного треугольника O_1AM, проведённой из вершины A: $O_1M=\sqrt{64^2+2304}=80$, $AK=2\cdot\dfrac{O_1A\cdot AM}{O_1M}=2\cdot\dfrac{64\cdot 48}{80}=\dfrac{384}{5}$. Аналогично $BK=2\cdot\dfrac{36\cdot 48}{60}=\dfrac{288}{5}$. $S_{AKB}=\dfrac12\cdot AK\cdot BK=\dfrac{55296}{25}$.
Ответ: б) $\dfrac{55296}{25}$.

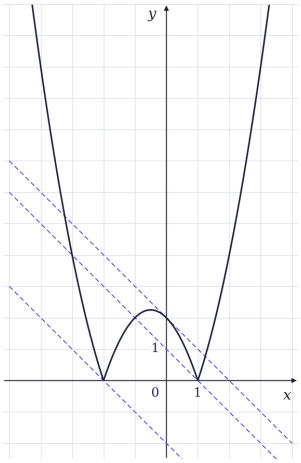
18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2+x-2\right| = -x+a$$

имеет ровно 2 различных корня.

Ответ: $a \in (-2;\,1)\cup(2;\,+\infty)$

Решение. Число корней уравнения равно числу общих точек графика $y=\left|x^2+x-2\right|$ и прямой $y=-x+a$ (угловой коэффициент -1). Поскольку $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$, график состоит из трёх частей: ветви параболы $y=x^2+x-2$ при $x\leqslant -2$, ветви той же параболы при $x\geqslant 1$ и дуги $y=-(x^2+x-2)$ при $-2<x<1$.



Граничные положения прямой. Прямая проходит через точку $(-2;\,0)$ при $a=-2$ и через точку $(1;\,0)$ при $a=1$.

Касание с дугой: уравнение $-(x^2+x-2)=-x+a$, то есть $x^2-2+a=0$, имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю: $a=2$; точка касания $x=0$ лежит в интервале $(-2;\,1)$.

Прямая с угловым коэффициентом -1 касается параболы $y=x^2+x-2$ в точке $x=-1$, которая не принадлежит крайним ветвям, поэтому касания с ветвями нет.

Перемещая прямую снизу вверх (с ростом a) и подсчитывая общие точки с графиком, получаем:

a	$a<-2$	-2	$(-2;\,1)$	1	$(1;\,2)$	2	$a>2$
Число корней	0	1	2	3	4	3	2

Ровно 2 корня получается при $a\in(-2;\,1)\cup(2;\,+\infty)$.

Ответ: $a\in(-2;\,1)\cup(2;\,+\infty)$.

19 Из чисел 1,2,…,20 выбирают различные числа так, чтобы среди них не было двух с разностью 10.

а) Можно ли выбрать 10 чисел?

б) Можно ли выбрать 11 чисел?

в) Какое наибольшее число элементов может быть у такого набора?

Ответ: а) да; б) нет; в) 10

Решение. Разобьём числа на пары (1,11), (2,12), …, (10,20). В каждом наборе можно взять не больше одного числа из пары, значит, не больше десяти всего. Набор 1,2,…,10 подходит и достигает границы.