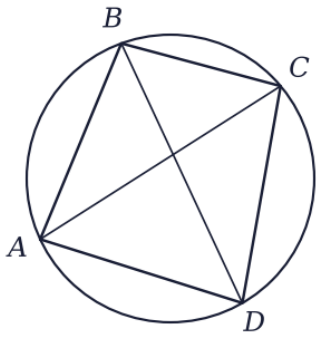
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 72°, угол CAD равен 45°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 117

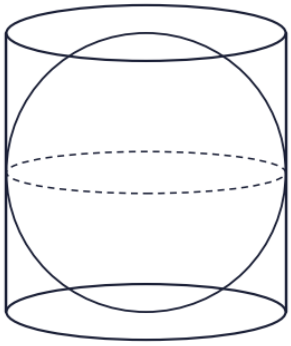
Решение. Вписанные углы CBD и CAD опираются на одну дугу CD, поэтому $\angle CBD = \angle CAD = 45^\circ$. Тогда $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 72^\circ + 45^\circ = 117^\circ$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(5;\ -3)$ и $\vec{b}\,(1;\ -6)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b}$.

Ответ: 5

Решение. $\vec{a} - \vec{b} = (4;\ 3)$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{16 + 9} = 5$.

3 В цилиндр вписан шар: шар касается обоих оснований цилиндра и его боковой поверхности. Площадь полной поверхности цилиндра равна 111. Найдите площадь поверхности шара.



Ответ: 74

Решение. Высота цилиндра равна диаметру шара: $h = 2r$. $S_{\text{цил}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2 = 111$, откуда $\pi r^2 = 18{,}5$; $S_{\text{шара}} = 4\pi r^2 = 74$.

4 В среднем из 500 электрочайников, поступивших в продажу, 14 неисправны. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля прибор исправен.

Ответ: 0,972

Решение. $P = \dfrac{500 - 14}{500} = 0{,}972$.

5 Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,7, второго — 0,7. Найдите вероятность того, что в мишень попадёт ровно один стрелок.

Ответ: 0,42

Решение. Ровно одно попадание: первый попал, второй нет, или наоборот. $P = 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$.

6 Найдите корень уравнения $\sqrt{140 - 7x} = 7$.

Ответ: 13

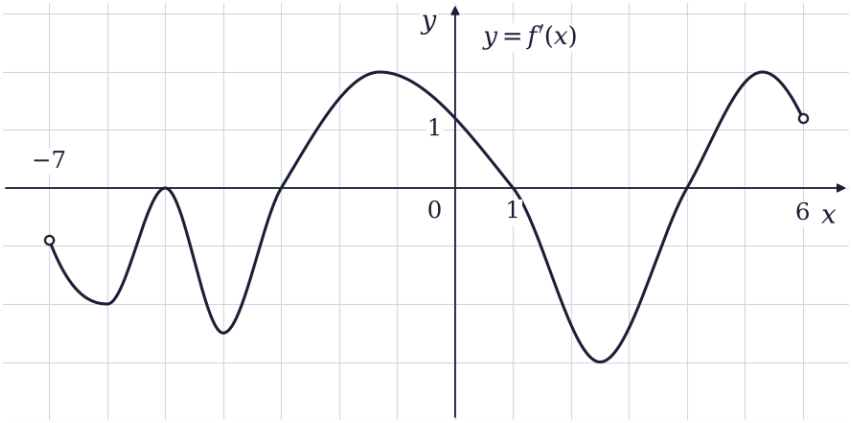
Решение. Возведём обе части в квадрат: $140 - 7x = 49$, $7x = 91$, $x = 13$.

7 Найдите значение выражения $27^{\log_3 5}$.

Ответ: 125

Решение. $27^{\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^3 = 5^3 = 125$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7;\ 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 2

Решение. В точке минимума производная меняет знак с «−» на «+». Таких точек 2: $-3;\ 4$.

9 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 2 + 20t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 17 метров?

Ответ: 2

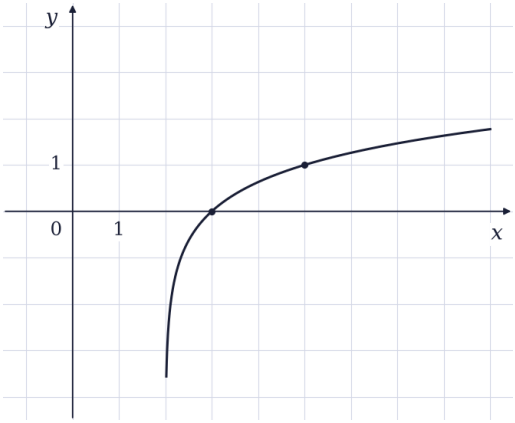
Решение. $h(t) \geqslant 17 \iff 5t^2 - 20t + 15 \leqslant 0 \iff 1 \leqslant t \leqslant 3$. Мяч находится не ниже 17 м в течение $3 - 1 = 2$ с.

10 Катер прошёл 13 км против течения реки и 57 км по течению, затратив на весь путь 4 часа. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 16

Решение. $\dfrac{13}{v-3} + \dfrac{57}{v+3} = 4$. Домножив на $(v-3)(v+3)$, получим квадратное уравнение, положительный корень которого больше 3: $v = 16$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x + b)$. Найдите $f(83)$.



Ответ: 4

Решение. $\log_a(x + b) = 0$ при $x + b = 1$; график пересекает ось абсцисс в точке $x = 3$, поэтому $b = -2$. По точке $(5;\ 1)$ находим $a = 3$. $f(83) = \log_3 81 = 4$.

12 Найдите точку максимума функции $y = x^2e^{4-x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

Ответ: 2

Решение. Производная $y' = e^{4-x}x(2 - x)$. При $0 < x < 2$ она положительна, при $x > 2$ отрицательна. Значит, точка максимума $x = 2$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x - \sin(x - \pi) = 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; **б)** 0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; π

Решение. а) По формуле приведения $\sin(x - \pi) = -\sin x$, а $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$\left(1 - 2\sin^2 x\right) + \sin x = 1 \iff 2\sin^2 x - \sin x = 0.$$

Отсюда $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = 0$.

Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, с помощью двойных неравенств (после

деления на π получаем неравенства для k).

$-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{6}+2\pi k \leqslant \pi \iff -\dfrac{1}{3} \leqslant k \leqslant \dfrac{5}{12}, k \in \{0\}: x=\dfrac{\pi}{6}.$

$-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \dfrac{5\pi}{6}+2\pi n \leqslant \pi \iff -\dfrac{2}{3} \leqslant n \leqslant \dfrac{1}{12}, n \in \{0\}: x=\dfrac{5\pi}{6}.$

$-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \pi m \leqslant \pi \iff -\dfrac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1, m \in \{0,1\}: x=0, x=\pi.$

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; б) 0; $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{5\pi}{6}$; π.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 10 на ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 3 : 2$.

а) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости ACC_1.

б) Найдите угол между плоскостью BDM и плоскостью $ABCD$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$

Решение. а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD \perp AC$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1 \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, значит, $BD \perp (ACC_1)$. Плоскость BDM проходит через прямую BD, перпендикулярную плоскости ACC_1, поэтому плоскости BDM и ACC_1 перпендикулярны.

б) Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Прямая OM лежит в плоскости ACC_1, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$; кроме того, $OC \perp BD$. Значит, $\angle MOC$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями BDM и $ABCD$. $OC = \dfrac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$, $CM = 6$, $\operatorname{tg}\angle MOC = \dfrac{CM}{OC} = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

15 Решите неравенство $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \leq 2$.

Ответ: $\left(-\dfrac{1}{2};\ 0\right] \cup [1;\ 4)$

Решение. Из $4+7x-2x^2>0$: $-\dfrac{1}{2}<x<4$; там $|x+2| = x+2 > 1$. Значит, $4+7x-2x^2 \leq (x+2)^2 \iff 3x^2-3x \geq 0 \iff x \leq 0$ или $x \geq 1$.

16 В июле 2032 года планируется взять кредит в банке на 8 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Найдите сумму кредита, если общая сумма выплат по кредиту составит 646 000 рублей. Ответ дайте в рублях.

Ответ: 340 000

Решение. Пусть S руб. — сумма кредита. Долг ежегодно уменьшается на $\frac{S}{8}$, проценты за все годы: $0{,}2S\left(1+\frac{7}{8}+\ldots+\frac{1}{8}\right)=0{,}2S\cdot\frac{9}{2}=0{,}9S$, общая сумма выплат $1{,}9S=646\,000$, откуда $S=340\,000$.

17 В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1, точка O — центр описанной окружности.
а) Докажите, что прямые AO и B_1C_1 перпендикулярны.
б) Найдите периметр треугольника $A_1B_1C_1$, если радиус описанной окружности треугольника ABC равен 5, а его площадь равна 30.

Ответ: б) 12

Решение. а) Точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC, поэтому $\angle AB_1C_1=\angle ABC$. Треугольник AOC равнобедренный с углом $AOC=2\angle ABC$, откуда $\angle OAC=90^\circ-\angle ABC$. Сумма углов OAB_1 и AB_1C_1 равна 90°, значит, $AO\perp B_1C_1$. б) Аналогично $BO\perp C_1A_1$, $CO\perp A_1B_1$. Точка O лежит внутри остроугольного треугольника, и он разбивается на четырёхугольники AC_1OB_1, BA_1OC_1, CB_1OA_1 с перпендикулярными диагоналями: $S=\frac{1}{2}R\left(B_1C_1+C_1A_1+A_1B_1\right)$. Периметр равен $\frac{2S}{R}=\frac{60}{5}=12$.

18 Найдите все a, при которых уравнение x²−ax+1=0 имеет ровно два различных корня в интервале (0;2).

Ответ: a∈(2;5/2)

Решение. Корни различны и положительны только при a>2: их произведение 1, сумма a. Меньший корень тогда лежит между 0 и 1, больший — правее 1. Оба меньше 2 тогда и только тогда, когда значение трёхчлена при x=2 положительно: 5−2a>0. Следовательно, 2

19 Множество {1,2,…,9} разделяют на две части с одинаковой суммой; перед разделением разрешено удалить одно число.

а) Можно ли разделить множество без удаления?

б) Можно ли разделить его после удаления 9?

в) Какое наименьшее число можно удалить, чтобы разделение стало возможным?

Ответ: а) нет; б) да; в) 1

Решение. Сумма всех девяти чисел 45 нечётна, поэтому без удаления равные целые суммы невозможны. После удаления 9 сумма равна 36; одна часть {8,7,3} имеет сумму 18, другая — тоже 18. Наименьшее разрешённое удаляемое число — 1, и оно подходит: сумма оставшихся 44; часть {9,8,5} имеет сумму 22, дополнение тоже 22.