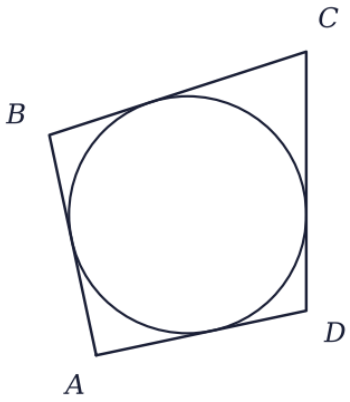
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 34, вписана окружность, $AB = 9$, $BC = 12$. Найдите CD.



Ответ: 8

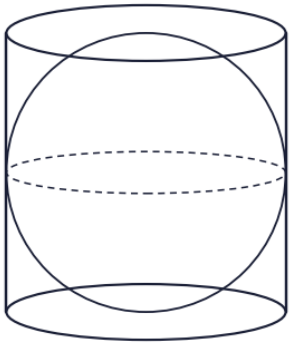
Решение. В описанном четырёхугольнике $AB + CD = BC + AD = \dfrac{P}{2} = 17$, поэтому $CD = 17 - 9 = 8$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(-5;\ -3)$ и $\vec{b}\,(-5;\ 3)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: 16

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5 \cdot (-5) + (-3) \cdot 3 = 16$.

3 В цилиндр вписан шар: шар касается обоих оснований цилиндра и его боковой поверхности. Объём цилиндра равен 18. Найдите объём шара.



Ответ: 12

Решение. Высота цилиндра равна диаметру шара: $V_{\text{цил}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 18$, откуда $\pi r^3 = 9$; $V_{\text{шара}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 12$.

4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют 5 спортсменов из Финляндии, 12 спортсменов из Дании и 8 спортсменов из Швеции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Ответ: 0,32

Решение. Всего спортсменов $5 + 12 + 8 = 25$, $P = \dfrac{8}{25} = 0{,}32$.

5 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,1 для каждого автомата, автоматы работают независимо. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе закончится в обоих автоматах.

Ответ: 0,01

Решение. События независимы: $P = 0{,}1^2 = 0{,}01$.

6 Найдите корень уравнения $6^{x+2} = 216$.

Ответ: 1

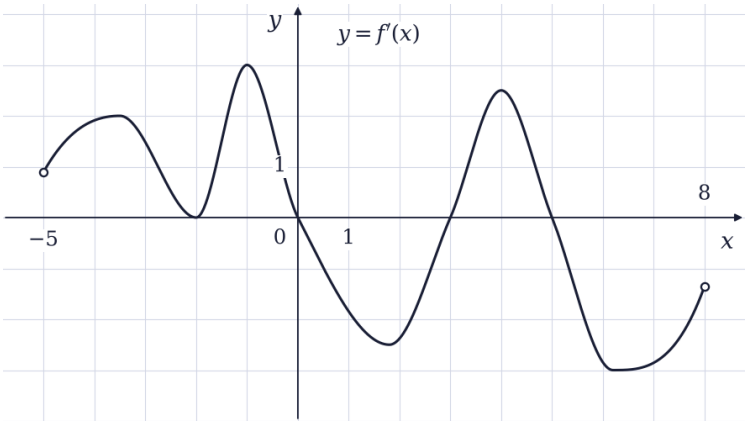
Решение. $216 = 6^3$, поэтому $x + 2 = 3$, $x = 1$.

7 Найдите значение выражения $21 \operatorname{tg} 24^\circ \cdot \operatorname{tg} 114^\circ$.

Ответ: -21

Решение. $\operatorname{tg} 114^\circ = -\operatorname{ctg} 24^\circ$, а $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, поэтому выражение равно -21.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 8)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 3

Решение. Точки экстремума — нули производной, в которых она меняет знак: $0;\ 3;\ 5$. В точке -2 график f' касается оси абсцисс без смены знака, это не экстремум. Всего 3.

9 Масса радиоактивного изотопа в образце уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа (в мг), t — время, прошедшее от начального момента (в минутах), T — период полураспада (в минутах). Начальная масса изотопа $m_0 = 640$ мг, период полураспада $T = 8$ мин. Через сколько минут масса изотопа станет равной 20 мг?

Ответ: 40

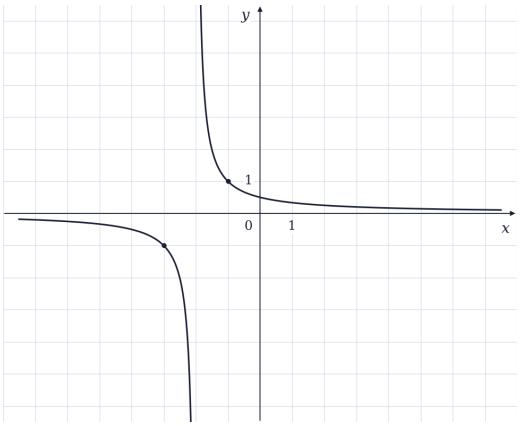
Решение. $640 \cdot 2^{-t/8} = 20 \iff 2^{-t/8} = 2^{-5} \iff t = 40$.

10 Два велосипедиста одновременно отправились в 120-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 2 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 10

Решение. Пусть v — скорость второго. $\dfrac{120}{v} - \dfrac{120}{v+2} = 2 \iff 2v^2 + 4v - 240 = 0$, положительный корень $v = 10$.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \dfrac{k}{x+a}$. Найдите значение $f(8)$.



Ответ: 0,1

Решение. По точкам $(-3;\ -1)$ и $(-1;\ 1)$: $k = (-1)\cdot(-3+a) = 1\cdot(-1+a)$, откуда $a = 2$, $k = 1$. $f(8) = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$.

12 Найдите наименьшее значение функции y = x + 16/x + 49 на отрезке [2; 12].

Ответ: 57

Решение. На отрезке x > 0. Производная y′ = 1 − 16/x^2 отрицательна при x < 4 и положительна при x > 4. Минимум достигается при x = 4; y(4) = 4 + 4 + 49 = 57.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x + 5\cos(\pi - x) = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; **б)** $\dfrac{10\pi}{3}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos(\pi - x) = -\cos x$, а $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Уравнение принимает вид

$$\left(2\cos^2 x - 1\right) - 5\cos x = 2 \iff 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0.$$

Отсюда $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ или $\cos x = 3$. Уравнение $\cos x = 3$ корней не имеет, так как $|3| > 1$.

Если $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, то $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \dfrac{9\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$3\pi \leqslant \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k \leqslant \dfrac{9\pi}{2} \iff \dfrac{7}{6} \leqslant k \leqslant \dfrac{23}{12}$: целых решений нет.

$3\pi \leqslant -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n \leqslant \dfrac{9\pi}{2} \iff \dfrac{11}{6} \leqslant n \leqslant \dfrac{31}{12}, n\in\{2\}$: $x=\dfrac{10\pi}{3}$.

Ответ: а) $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{10\pi}{3}$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 30 на ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM:MC_1=2:3$.

а) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости ACC_1.

б) Найдите угол между плоскостью BDM и плоскостью $ABCD$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

Решение. а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD\perp AC$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1\perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, значит, $BD\perp(ACC_1)$. Плоскость BDM проходит через прямую BD, перпендикулярную плоскости ACC_1, поэтому плоскости BDM и ACC_1 перпендикулярны.

б) Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Прямая OM лежит в плоскости ACC_1, поэтому по пункту а) $OM\perp BD$; кроме того, $OC\perp BD$. Значит, $\angle MOC$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями BDM и $ABCD$. $OC=\dfrac{30\sqrt{2}}{2}=15\sqrt{2}$, $CM=12$,

$\operatorname{tg}\angle MOC=\dfrac{CM}{OC}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

15 Решите неравенство $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$.

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)\cup(1;\ 2)\cup(3;\ 6)$

Решение. ОДЗ: $x>0, x\ /\ \dfrac{1}{2}, (x-2)(x-3)>0$. Рационализация: $(2x-1)(x^2-5x+6-2x)<0 \iff (2x-1)(x-1)(x-6)<0$, откуда $x<\dfrac{1}{2}$ или $1<x<6$.

Пересечение с ОДЗ даёт ответ.

16 В июле 2031 года планируется взять кредит в банке на сумму 1 290 000 рублей на 3 года. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Сколько рублей составит общая сумма выплат по кредиту?

Ответ: 1 677 000

Решение. Пусть $S = 1\,290\,000$ руб. Долг ежегодно уменьшается на $\dfrac{S}{3}$. Проценты за все годы: $0{,}15S\left(1 + \dfrac{2}{3} + \ldots + \dfrac{1}{3}\right) = 0{,}15S \cdot \dfrac{4}{2} = 387\,000$. Общая сумма выплат: $1\,290\,000 + 387\,000 = 1\,677\,000$.

17 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, его диагонали перпендикулярны и пересекаются в точке P.
а) Докажите, что прямая, проходящая через P перпендикулярно BC, делит сторону AD пополам.
б) Найдите расстояние от O до прямой AD, если $BC = 10$.

Ответ: б) 5

Решение. а) Пусть прямая пересекает BC в точке H, а AD — в точке X. $\angle XPA = \angle CPH = 90^\circ - \angle PCB = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \angle ADB = \angle PAD$, значит, $XA = XP$; аналогично $XD = XP$. б) $\angle AOD = 2\angle ABD$, расстояние $d = R\cos\angle ABD = R\sin\angle BAC = \dfrac{BC}{2} = 5$ (так как $\angle ABD + \angle BAC = 90^\circ$).

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 + 4x\right| = -x + a$$

имеет ровно 2 различных корня.

Ответ: $a \in (-4;\ 0) \cup (2{,}25;\ +\infty)$

Решение. Число корней уравнения равно числу общих точек графика $y = \left|x^2 + 4x\right|$ и прямой $y = -x + a$ (угловой коэффициент -1). Поскольку $x^2 + 4x = (x + 4)x$, график состоит из трёх частей: ветви параболы $y = x^2 + 4x$ при $x \leqslant -4$, ветви той же параболы при $x \geqslant 0$ и дуги $y = -(x^2 + 4x)$ при $-4 < x < 0$.



Граничные положения прямой. Прямая проходит через точку $(-4;\ 0)$ при $a = -4$ и через точку $(0;\ 0)$ при $a = 0$.

Касание с дугой: уравнение $-(x^2 + 4x) = -x + a$, то есть $x^2 + 3x + a = 0$, имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю: $a = 2{,}25$; точка касания $x = -1{,}5$ лежит в интервале $(-4;\ 0)$.

Прямая с угловым коэффициентом -1 касается параболы $y = x^2 + 4x$ в точке $x = -2{,}5$, которая не принадлежит крайним ветвям, поэтому касания с ветвями нет.

Перемещая прямую снизу вверх (с ростом a) и подсчитывая общие точки с графиком, получаем:

a	$a < -4$	-4	$(-4;\ 0)$	0	$(0;\ 2{,}25)$	$2{,}25$	$a > 2{,}25$
Число корней	0	1	2	3	4	3	2

Ровно 2 корня получается при $a \in (-4;\ 0) \cup (2{,}25;\ +\infty)$.

Ответ: $a \in (-4;\ 0) \cup (2{,}25;\ +\infty)$.

19

На доске 4×4 размещают ладьи так, чтобы ни две не били друг друга.

а) Можно ли разместить четыре ладьи?

б) Можно ли разместить пять ладей?

в) Сколько различных расстановок четырёх ладей существует?

Ответ: а) да; б) нет; в) 24

Решение. В каждом из четырёх рядов может стоять не больше одной ладьи, поэтому пять разместить нельзя. Чтобы поставить четыре, нужно занять все четыре ряда и каждый из четырёх столбцов ровно один раз. Выбираем столбец для первого ряда четырьмя способами, для второго — тремя, затем двумя и одним: 4!=24. Пример — вся главная диагональ.