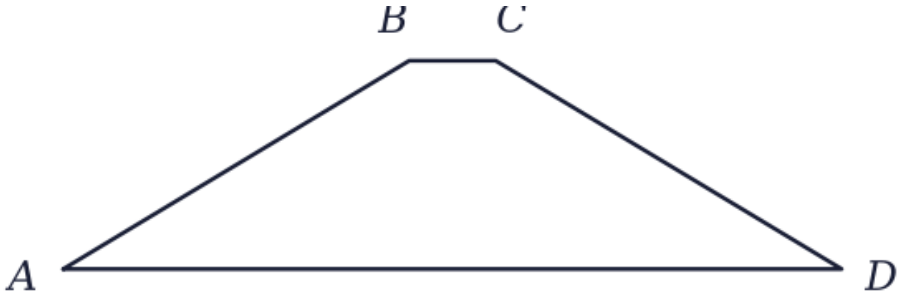
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

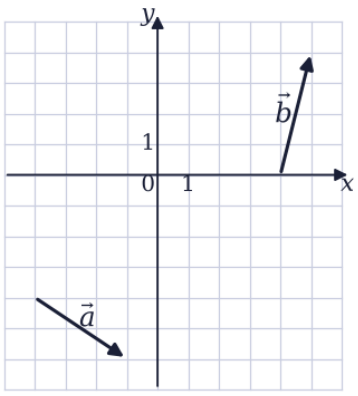
1 В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 27 и 3 соответственно, а боковая сторона равна 13. Найдите площадь трапеции.



Ответ: 75

Решение. Проекция боковой стороны на большее основание равна $\dfrac{27-3}{2}=12$, высота $h=\sqrt{13^2-12^2}=5$, $S=\dfrac{27+3}{2}\cdot 5=75$.

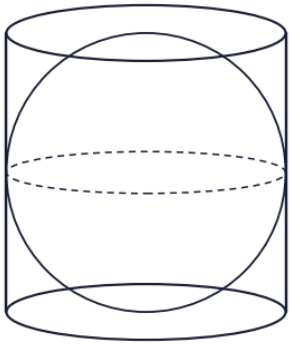
2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.



Ответ: -5

Решение. По рисунку $\vec{a}\,(3;\,-2)$, $\vec{b}\,(1;\,4)$. $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 1+(-2)\cdot 4=-5$.

3 В цилиндр вписан шар: шар касается обоих оснований цилиндра и его боковой поверхности. Объём цилиндра равен 69. Найдите объём шара.



Ответ: 46

Решение. Высота цилиндра равна диаметру шара: $V_{\text{цил}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 69$, откуда $\pi r^3 = 34{,}5$; $V_{\text{шара}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 46$.

4 В коробке лежат 25 одинаковых на вид чайных пакетиков: 3 пакетика с зелёным чаем, 12 — с белым, остальные — с чёрным. Найдите вероятность того, что случайно выбранный пакетик окажется с чёрным чаем.

Ответ: 0,4

Решение. Пакетиков с чёрным чаем $25 - 3 - 12 = 10$; $P = \dfrac{10}{25} = 0{,}4$.

5 Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 30% этих стёкол, вторая — 70%. Первая фабрика выпускает 5% бракованных стёкол, а вторая — 4%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ: 0,043

Решение. По формуле полной вероятности: $P = 0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}7 \cdot 0{,}04 = 0{,}043$.

6 Найдите корень уравнения $\log_4(94 - x) = 3$.

Ответ: 30

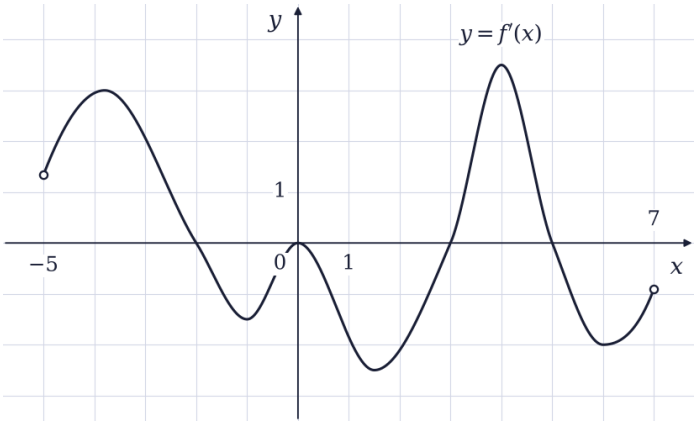
Решение. По определению логарифма $94 - x = 4^3 = 64$, откуда $x = 30$. Аргумент логарифма положителен.

7 Найдите значение выражения $49^{\log_7 3}$.

Ответ: 9

Решение. $49^{\log_7 3} = \left(7^{\log_7 3}\right)^2 = 3^2 = 9$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 7)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: 3

Решение. Функция возрастает там, где $f'(x) > 0$ (касание оси без смены знака промежуток не разрывает): $(-5;\ -2)$, $(3;\ 5)$. Наибольшая длина равна 3.

9 Масса радиоактивного изотопа в образце уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа (в мг), t — время, прошедшее от начального момента (в минутах), T — период полураспада (в минутах). Начальная масса изотопа $m_0 = 640$ мг, период полураспада $T = 5$ мин. Через сколько минут масса изотопа станет равной 10 мг?

Ответ: 30

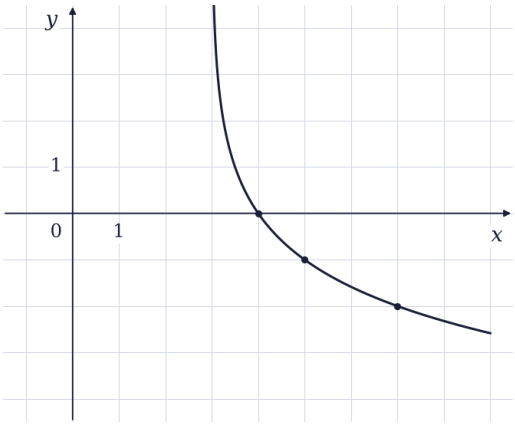
Решение. $640 \cdot 2^{-t/5} = 10 \iff 2^{-t/5} = 2^{-6} \iff t = 30$.

10 Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 90 литров она заполняет на 20 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: 3

Решение. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{90}{x} - \dfrac{90}{x+6} = 20$, положительный корень $x = 3$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = -\log_a(x+b)$. Найдите $f(35)$.



Ответ: -5

Решение. $\log_a(x+b) = 0$ при $x+b=1$; график пересекает ось абсцисс в точке $x=4$, поэтому $b=-3$. По точке $(7;\ -2)$ находим $a=2$. $f(35) = -\log_2 32 = -5$.

12 Найдите точку максимума функции y = (x − 3)^3 − 48(x − 3) + 46.

Ответ: -1

Решение. Производная y′ = 3((x − 3)^2 − 16). Она равна нулю при x = -1 и x = 7. Знаки производной на трёх промежутках: +, −, +. Поэтому точка максимума x = -1, точка минимума x = 7. Ответ: -1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $2\cos^2 x + 5\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = 5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$**; б)** $-\frac{3\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \sin x$, а $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$.

Уравнение принимает вид

$$2\left(1-\sin^2 x\right)+5\sin x = 5 \ \Leftrightarrow\ 2\sin^2 x - 5\sin x + 3 = 0.$$

Отсюда $\sin x = 1$ или $\sin x = 1{,}5$. Уравнение $\sin x = 1{,}5$ корней не имеет, так как $|1{,}5|>1$. Если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\dfrac{3\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$-3\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2}+2\pi k \leqslant -\dfrac{3\pi}{2} \iff -\dfrac{7}{4} \leqslant k \leqslant -1, k\in\{-1\}$: $x=-\dfrac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{3\pi}{2}$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 на ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM:MC_1=2:1$.

а) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости ACC_1.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью BDM.

Ответ: б) $24\sqrt{17}$

Решение. а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD\perp AC$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1\perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, значит, $BD\perp(ACC_1)$. Плоскость BDM проходит через прямую BD, перпендикулярную плоскости ACC_1, поэтому плоскости BDM и ACC_1 перпендикулярны.

б) Точка M лежит на ребре CC_1, поэтому плоскость BDM пересекает грани куба по отрезкам BD, BM и DM, и сечение — треугольник BDM. Пусть O — центр квадрата $ABCD$; прямая OM лежит в плоскости ACC_1, поэтому по пункту а) $OM\perp BD$, и OM — высота треугольника BDM. $OC=\dfrac{12\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$, $CM=8$, $OM=\sqrt{OC^2+CM^2}=\sqrt{72+64}=2\sqrt{34}$, $BD=12\sqrt{2}$. $S_{BDM}=\dfrac{1}{2}\cdot 12\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{34}=24\sqrt{17}$.

Ответ: б) $24\sqrt{17}$.

15 Решите неравенство

$$\log_3^2 x-4\log_3 x+3\geqslant 0.$$

Ответ: $(0;\ 3]\cup[27;\ +\infty)$

Решение. ОДЗ: $x>0$. Сделаем замену $t=\log_3 x$: $t^2-4t+3\geqslant 0 \iff (t-1)(t-3)\geqslant 0 \iff t\leqslant 1$ или $t\geqslant 3$.

Функция $y=\log_3 x$ возрастает, поэтому $\log_3 x\leqslant 1 \iff 0<x\leqslant 3$, $\log_3 x\geqslant 3 \iff x\geqslant 27$.

Ответ: $(0;\ 3]\cup[27;\ +\infty)$.

16 Кредит 2,2 млн руб. на 3 года под 20 % (стандартная схема). В первый год платятся только проценты, а за следующие 2 года долг гасится двумя равными платежами. Найдите общую сумму выплат.

Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 3 320 000 руб.

Решение. 1-й год: $0{,}44$. Далее $X = 2{,}2 \cdot 1{,}44 : 2{,}2 = 1{,}44$. $\Sigma = 0{,}44 + 2 \cdot 1{,}44 = 3{,}32$ млн руб.

17 Окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами 3 и 4 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, параллельная O_1O_2; она вторично пересекает окружности в точках C и D, A лежит между C и D.

а) Докажите, что $CD = 2\,O_1O_2$.

б) Найдите AB, если $CD = 10$.

Ответ: б) $4{,}8$

Решение. а) Проекции O_1 и O_2 на прямую CD — середины хорд AC и AD, расстояние между ними равно O_1O_2 и равно $\dfrac{CD}{2}$. б) $O_1O_2 = 5 = \sqrt{3^2 + 4^2}$, угол O_1AO_2 прямой; $AB = 2 \cdot \dfrac{3 \cdot 4}{5} = 4{,}8$.

18 Найдите все a, при которых уравнение $3^x+a\cdot 3^{-x}=2$ имеет ровно два различных действительных корня.

Ответ: a∈(0;1)

Решение. Положим $t=3^x>0$. Уравнение равносильно $t^2-2t+a=0$. Два различных положительных корня существуют тогда и только тогда, когда произведение a положительно и дискриминант $4-4a$ положителен: 0

19 Из начала координат в точку (3;3) идут по клеткам, делая ровно шесть шагов: вправо или вверх.

а) Может ли число маршрутов, проходящих через (1;1), равняться 12?

б) Может ли оно равняться 13?

в) Сколько маршрутов не проходят через (1;1)?

Ответ: а) да; б) нет; в) 8

Решение. Всего способов разместить три шага вправо среди шести равно $C(6,3)=20$. Через (1;1) идут $C(2,1)\cdot C(4,2)=2\cdot 6=12$ маршрутов: отдельно выбираем путь до этой точки и после неё. Значит, 13 таких маршрутов нет, а не проходящих через точку $20-12=8$.