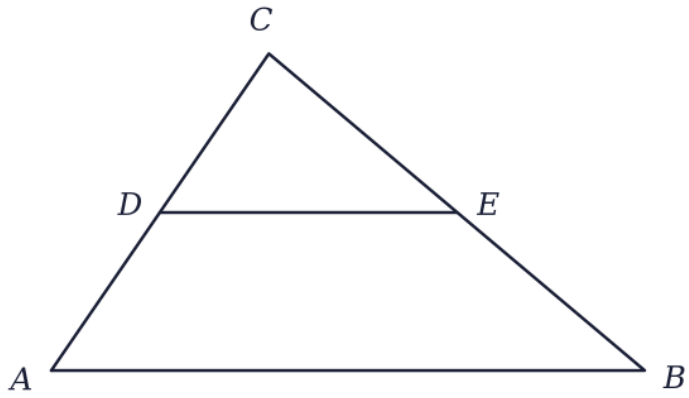
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

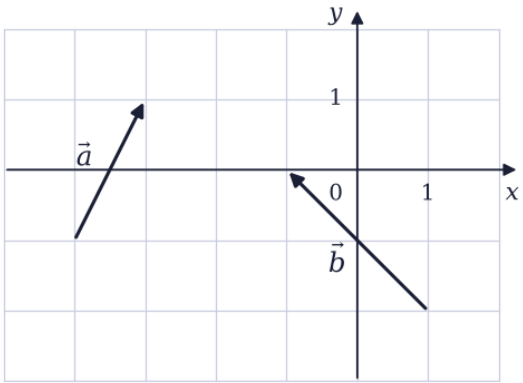
1 Площадь треугольника ABC равна 120, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь треугольника CDE.



Ответ: 30

Решение. Треугольник CDE подобен треугольнику CAB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, поэтому его площадь в 4 раза меньше: $\frac{120}{4} = 30$.

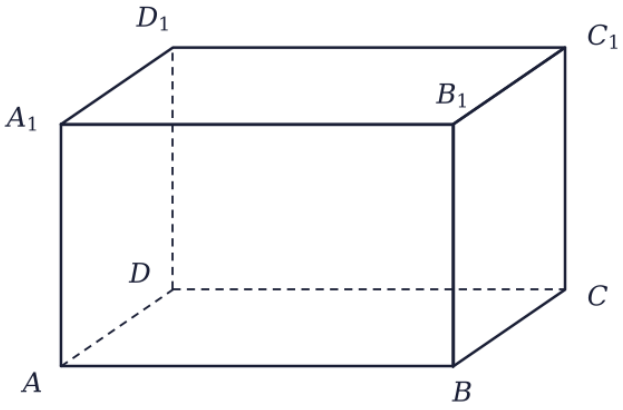
2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Ответ: 2

Решение. По рисунку $\vec{a}\,(1;\,2)$, $\vec{b}\,(-2;\,2)$. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 2$.

3 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 12$, $BC = 12$, $AA_1 = 1$. Найдите длину диагонали AC_1.



Ответ: 17

Решение. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений: $AC_1 = \sqrt{12^2 + 12^2 + 1^2} = \sqrt{289} = 17$.

4 В коробке лежат 32 одинаковых на вид чайных пакетиков: 16 пакетиков с зелёным чаем, 10 — с белым, остальные — с чёрным. Найдите вероятность того, что случайно выбранный пакетик окажется с чёрным чаем.

Ответ: 0,1875

Решение. Пакетиков с чёрным чаем $32 - 16 - 10 = 6$; $P = \dfrac{6}{32} = 0{,}1875$.

5 Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,6, второго — 0,3. Найдите вероятность того, что в мишень попадёт ровно один стрелок.

Ответ: 0,54

Решение. Ровно одно попадание: первый попал, второй нет, или наоборот. $P = 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}54$.

6 Найдите корень уравнения $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2} = 4$.

Ответ: 0

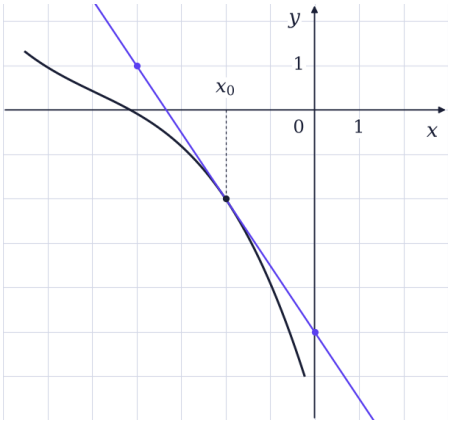
Решение. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2} = 2^{2-x}$, $4 = 2^2$. Тогда $2 - x = 2$, $x = 0$.

7 Найдите значение выражения $9^{\log_3 7}$.

Ответ: 49

Решение. $9^{\log_3 7} = \left(3^{\log_3 7}\right)^2 = 7^2 = 49$.

8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: -1,5

Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Касательная проходит через точки $(-4;\ 1)$ и $(0;\ -5)$: $k = \dfrac{-5-1}{0-(-4)} = -1{,}5$.

9 Масса радиоактивного изотопа в образце уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа (в мг), t — время, прошедшее от начального момента (в минутах), T — период полураспада (в минутах). Начальная масса изотопа $m_0 = 120$ мг, период полураспада $T = 6$ мин. Через сколько минут масса изотопа станет равной 1,875 мг?

Ответ: 36

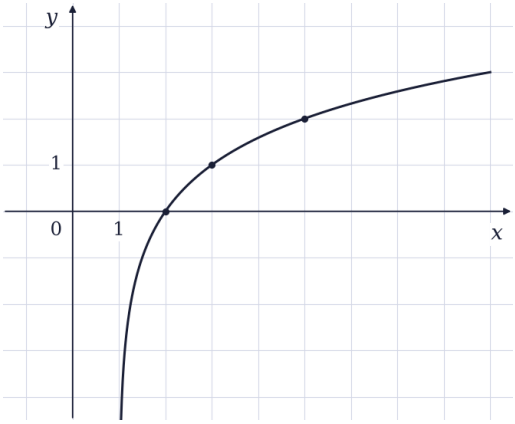
Решение. $120 \cdot 2^{-t/6} = 1{,}875 \iff 2^{-t/6} = 2^{-6} \iff t = 36$.

10 Катер прошёл 55 км против течения реки и 38 км по течению, затратив на весь путь 7 часов. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 15

Решение. $\dfrac{55}{v-4} + \dfrac{38}{v+4} = 7$. Домножив на $(v-4)(v+4)$, получим квадратное уравнение, положительный корень которого больше 4: $v = 15$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x)=\log_a(x+b)$. Найдите $f(65)$.



Ответ: 6

Решение. $\log_a(x+b)=0$ при $x+b=1$; график пересекает ось абсцисс в точке $x=2$, поэтому $b=-1$. По точке $(5;\ 2)$ находим $a=2$. $f(65)=\log_2 64=6$.

12 Найдите точку минимума функции $y=(x-3)^3-48(x-3)+43$.

Ответ: 7

Решение. Производная $y'=3((x-3)^2-16)$. Она равна нулю при x = -1 и x = 7. Знаки производной на трёх промежутках: +, −, +. Поэтому точка максимума x = -1, точка минимума x = 7. Ответ: 7.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x+5\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$**; б)** $-\frac{3\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, а $\cos 2x=1-2\sin^2 x$.

Уравнение принимает вид

$$\left(1-2\sin^2 x\right)+5\sin x=4\ \Leftrightarrow\ 2\sin^2 x-5\sin x+3=0.$$

Отсюда $\sin x=1$ или $\sin x=1{,}5$. Уравнение $\sin x=1{,}5$ корней не имеет, так как $|1{,}5|>1$. Если $\sin x=1$, то $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после

деления на π получаем неравенства для k).

$-3\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant -\dfrac{3\pi}{2} \iff -\dfrac{7}{4} \leqslant k \leqslant -1$, $k \in \{-1\}$: $x = -\dfrac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{3\pi}{2}$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 3, боковое ребро равно 11. Точка M — середина ребра SC.

а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости SAC.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BDM.

Ответ: б) $\dfrac{33\sqrt{2}}{4}$

Решение. а) Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Диагонали квадрата перпендикулярны: $BD \perp AC$. Пирамида правильная, поэтому её высота — отрезок SO, и $SO \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и SO плоскости SAC, значит, $BD \perp (SAC)$.

б) Плоскость BDM пересекает пирамиду по треугольнику BDM. Отрезок OM — средняя линия треугольника SAC: $OM = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{11}{2}$. Прямая OM лежит в плоскости SAC, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$, то есть OM — высота треугольника BDM. $BD = 3\sqrt{2}$, $S_{BDM} = \dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \dfrac{11}{2} = \dfrac{33\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: б) $\dfrac{33\sqrt{2}}{4}$.

15 Решите неравенство

$$\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 \geqslant 0.$$

Ответ: $(0;\ 0{,}5] \cup [8;\ +\infty)$

Решение. ОДЗ: $x > 0$. Сделаем замену $t = \log_2 x$: $t^2 - 2t - 3 \geqslant 0 \iff (t+1)(t-3) \geqslant 0 \iff t \leqslant -1$ или $t \geqslant 3$.

Функция $y = \log_2 x$ возрастает, поэтому $\log_2 x \leqslant -1 \iff 0 < x \leqslant 0{,}5$, $\log_2 x \geqslant 3 \iff x \geqslant 8$.

Ответ: $(0;\ 0{,}5] \cup [8;\ +\infty)$.

16 Кредит S на 4 года под 10 % (стандартная схема). Первые 3 года платятся только проценты, а в четвёртый год долг гасится полностью. Общая сумма выплат 2,8 млн руб. Найдите S.

Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 2 000 000 руб.

Решение. 4 года проценты начисляются на S: $\Sigma = S + 0{,}4S = 1{,}4S = 2{,}8 \Rightarrow S = 2$ млн руб.

17 В равнобедренную трапецию с основаниями a и b вписана окружность.

а) Докажите, что высота трапеции равна $\sqrt{ab}$.

б) Найдите площадь трапеции, если её основания равны 2 и 8.

Ответ: б) 20

Решение. а) Боковая сторона равна $\dfrac{a+b}{2}$ (суммы противоположных сторон равны); $h^2 = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2 = ab$. б) $h = 4$, $S = \dfrac{2+8}{2}\cdot 4 = 20$.

18 Найдите все a, при которых уравнение √x+√(4−x)=a имеет ровно два различных корня.

Ответ: a∈[2;2√2)

Решение. ОДЗ: 0≤x≤4. Функция симметрична относительно x=2, строго возрастает на [0;2] и убывает на [2;4]. На концах значение 2, в центре максимум 2√2. При 2≤a<2√2 два корня; ниже 2 их нет, при максимуме корень один.

19 Число n! оканчивается на определённое число нулей (n — натуральное).

а) Может ли 100! оканчиваться ровно на 24 нуля?

б) Существует ли n, для которого n! оканчивается ровно на 25 нулей?

в) Найдите наименьшее n, при котором n! имеет ровно 24 конечных нуля.

Ответ: а) да; б) да; в) 100

Решение. Количество конечных нулей n! равно числу множителей 5: ⌊n/5⌋+⌊n/25⌋+⌊n/125⌋+… . Для n=100 это 20+4=24, а при n=99 это 19+3=22. Значит, 100 — наименьшее n с 24 нулями. При переходе к 105! число нулей становится 21+4=25 — следовательно, ответ б) да.