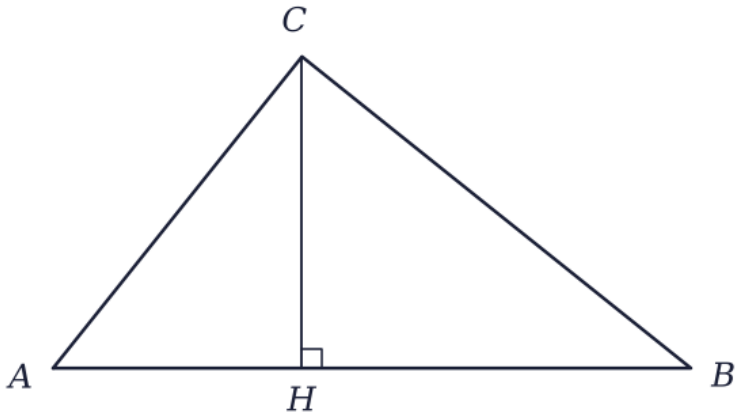
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AH = 16$, $BH = 25$. Найдите CH.



Ответ: 20

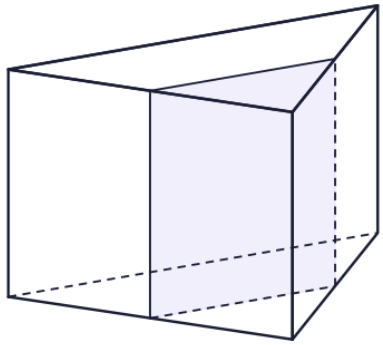
Решение. Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, есть среднее пропорциональное отрезков гипотенузы: $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{16 \cdot 25} = 20$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(5;\ -5)$ и $\vec{b}\,(-6;\ -7)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: 5

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot (-6) + (-5) \cdot (-7) = 5$.

3 Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объём отсечённой треугольной призмы равен 96. Найдите объём исходной призмы.



Ответ: 384

Решение. Основание отсечённой призмы — треугольник, подобный основанию исходной с коэффициентом $\frac{1}{2}$, его площадь в 4 раза меньше. Высоты призм равны, поэтому объём исходной призмы в 4 раза больше: $4 \cdot 96 = 384$.

4 В сборнике билетов по истории всего 125 билетов, в 58 из них встречается вопрос по теме «Петровские реформы». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по этой теме.

Ответ: 0,464

Решение. $P = \frac{58}{125} = 0{,}464$.

5 В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,2 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Ответ: 0,96

Решение. Оба автомата неисправны с вероятностью $0{,}2^2 = 0{,}04$. Хотя бы один исправен: $1 - 0{,}04 = 0{,}96$.

6 Найдите корень уравнения $2^{x-5} = 4$.

Ответ: 7

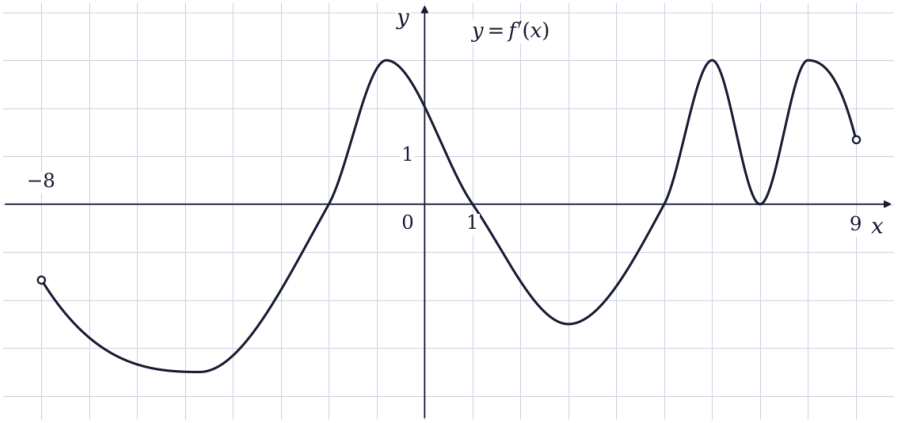
Решение. $4 = 2^2$, поэтому $x - 5 = 2$, $x = 7$.

7 Найдите значение выражения $\log_{0{,}6} 27 - \log_{0{,}6} 45$.

Ответ: 1

Решение. $\log_{0{,}6} 27 - \log_{0{,}6} 45 = \log_{0{,}6} \dfrac{27}{45} = \log_{0{,}6} 0{,}6 = 1$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8;\ 9)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: 4

Решение. Функция возрастает там, где $f'(x) > 0$ (касание оси без смены знака промежуток не разрывает): $(-2;\ 1)$, $(5;\ 9)$. Наибольшая длина равна 4.

9 Масса радиоактивного изотопа в образце уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа (в мг), t — время, прошедшее от начального момента (в минутах), T — период полураспада (в минутах). Начальная масса изотопа $m_0 = 640$ мг, период полураспада $T = 8$ мин. Через сколько минут масса изотопа станет равной 80 мг?

Ответ: 24

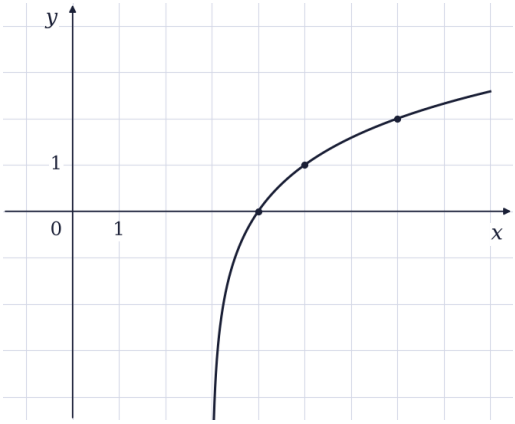
Решение. $640 \cdot 2^{-t/8} = 80 \iff 2^{-t/8} = 2^{-3} \iff t = 24$.

10 Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 90 литров она заполняет на 6 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: 6

Решение. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{90}{x} - \dfrac{90}{x+4} = 6$, положительный корень $x = 6$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x + b)$. Найдите $f(19)$.



Ответ: 4

Решение. $\log_a(x + b) = 0$ при $x + b = 1$; график пересекает ось абсцисс в точке $x = 4$, поэтому $b = -3$. По точке $(7;\ 2)$ находим $a = 2$. $f(19) = \log_2 16 = 4$.

12 Найдите наибольшее значение функции y = (x − 2)^3 − 27(x − 2) + 40 на отрезке [-4; 5].

Ответ: 94

Решение. Производная y′ = 3((x − 2)^2 − 9); критические точки x = -1, x = 5. На концах отрезка y(-4) = -14, y(5) = -14. Во внутренней критической точке y(-1) = 94. Наибольшее значение: 94.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $2\cos^2 x - \sin(\pi + x) = -1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$**; б)** $\dfrac{3\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\sin(\pi + x) = -\sin x$, а $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$2\left(1 - \sin^2 x\right) + \sin x = -1 \iff 2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0.$$

Отсюда $\sin x = -1$ или $\sin x = 1{,}5$. Уравнение $\sin x = 1{,}5$ корней не имеет, так как $|1{,}5| > 1$. Если $\sin x = -1$, то $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$\pi \leqslant -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant \dfrac{5\pi}{2} \iff \dfrac{3}{4} \leqslant k \leqslant \dfrac{3}{2}, k \in \{1\}$: $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{3\pi}{2}$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 на ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 2 : 1$.

а) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости ACC_1.

б) Найдите угол между плоскостью BDM и плоскостью $ABCD$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Решение. а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD \perp AC$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1 \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, значит, $BD \perp (ACC_1)$. Плоскость BDM проходит через прямую BD, перпендикулярную плоскости ACC_1, поэтому плоскости BDM и ACC_1 перпендикулярны.

б) Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Прямая OM лежит в плоскости ACC_1, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$; кроме того, $OC \perp BD$. Значит, $\angle MOC$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями BDM и $ABCD$. $OC = \dfrac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$, $CM = 8$, $\operatorname{tg} \angle MOC = \dfrac{CM}{OC} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

15 Решите неравенство

$$\frac{4^x - 6 \cdot 2^{x+1} + 32}{\log_5(x)} \leqslant 0.$$

Ответ: $(0;\ 1) \cup [2;\ 3]$

Решение. Область допустимых значений: $x > 0$ и $\log_5(x)\ /\ 0$, то есть ~~x~~ > 0, $x\ /\ 1$. $= 6 \cdot 2^{x+1} = 12 \cdot 2^x$, числитель раскладывается на множители: $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = (2^x - 4)(2^x - 8)$.

Функции $y = 2^t$ и $y = \log_5 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак $2^x - 4$ совпадает со знаком $x - 2$, знак $2^x - 8$ — со знаком $x - 3$, знак $\log_5(x) = \log_5(x) - \log_5 1$ — со знаком $x - 1$. Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x-1} \leqslant 0, \quad x > 0.$$

Метод интервалов: на $(0;\ 1)$ дробь отрицательна; на $(1;\ 2)$ дробь положительна; на $(2;\ 3)$ дробь отрицательна; на $(3;\ +\infty)$ дробь положительна; в точках $x = 2$, $x = 3$ числитель равен нулю. Ответ: $(0;\ 1) \cup [2;\ 3]$.

16 Кредит S взят в июле на 3 года под 20 % (стандартная схема). Долг в июле:

Дата	**2027**	**2028**	**2029**	**2030**
Долг, % от кредита	100	60	30	0

Общая сумма выплат 6,9 млн руб. Найдите S.

Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 5 000 000 руб.

Решение. $\Sigma = S\bigl(1 + 0{,}2\cdot(1 + 0{,}6 + 0{,}3)\bigr) = 1{,}38S = 6{,}9 \Rightarrow S = 5$ млн руб.

17 Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K.

а) Докажите, что треугольник ABK равнобедренный.

б) Найдите площадь параллелограмма, если $AB = 5$, $KC = 3$, $AK = 8$.

Ответ: б) $38{,}4$

Решение. а) $\angle BKA = \angle KAD$ (накрест лежащие) $= \angle BAK$. б) $BK = 5$, $BC = 8$. В треугольнике ABK со сторонами $5, 5, 8$ площадь 12, высота к BK равна $\frac{24}{5}$; $S = 8\cdot\frac{24}{5} = 38{,}4$.

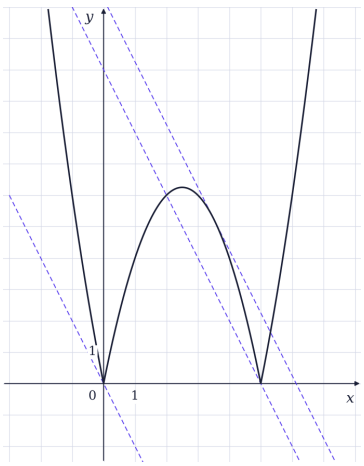
18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\bigl|x^2 - 5x\bigr| = -2x + a$$

имеет ровно 2 различных корня.

Ответ: $a \in (0;\,10)\cup(12{,}25;\,+\infty)$

Решение. Число корней уравнения равно числу общих точек графика $y = \bigl|x^2 - 5x\bigr|$ и прямой $y = -2x + a$ (угловой коэффициент -2). Поскольку $x^2 - 5x = x(x-5)$, график состоит из трёх частей: ветви параболы $y = x^2 - 5x$ при $x \leqslant 0$, ветви той же параболы при $x \geqslant 5$ и дуги $y = -(x^2 - 5x)$ при $0 < x < 5$.



Граничные положения прямой. Прямая проходит через точку $(0;\ 0)$ при $a = 0$ и через точку $(5;\ 0)$ при $a = 10$.

Касание с дугой: уравнение $-(x^2 - 5x) = -2x + a$, то есть $x^2 - 7x + a = 0$, имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю: $a = 12{,}25$; точка касания $x = 3{,}5$ лежит в интервале $(0;\ 5)$.

Прямая с угловым коэффициентом -2 касается параболы $y = x^2 - 5x$ в точке $x = 1{,}5$, которая не принадлежит крайним ветвям, поэтому касания с ветвями нет.

Перемещая прямую снизу вверх (с ростом a) и подсчитывая общие точки с графиком, получаем:

a	$a < 0$	0	$(0;\ 10)$	10	$(10;\ 12{,}25)$	$12{,}25$	$a > 12{,}25$
Число корней	0	1	2	3	4	3	2

Ровно 2 корня получается при $a \in (0;\ 10) \cup (12{,}25;\ +\infty)$.

Ответ: $a \in (0;\ 10) \cup (12{,}25;\ +\infty)$.

19

Три натуральных числа являются сторонами треугольника с периметром 12; треугольники, отличающиеся лишь порядком сторон, считаются одним.

а) Может ли треугольник быть равносторонним?

б) Может ли он быть разносторонним?

в) Сколько существует таких треугольников?

Ответ: а) да; б) да; в) 3

Решение. Пусть a≤b≤c. Из a+b+c=12 и a+b>c следует c<6, то есть c≤5. При c=5 пары (a,b) с a+b=7 и a≤b≤5 дают (2,5) и (3,4); при c=4 получаем только (4,4). При меньшем c сумма трёх сторон не достигает 12. Все три набора (2,5,5), (3,4,5), (4,4,4) подходят. Среди них есть равносторонний и разносторонний.