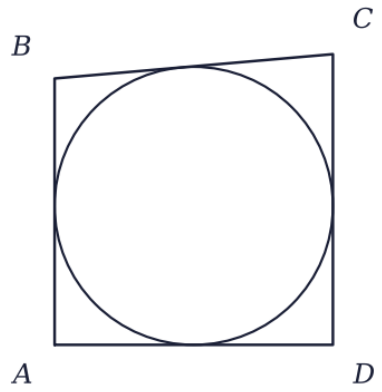
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 30, вписана окружность, $AB = 10$, $BC = 6$. Найдите CD.



Ответ: 5

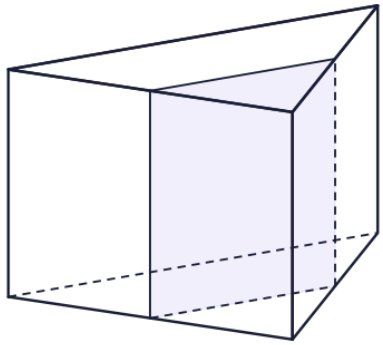
Решение. В описанном четырёхугольнике $AB + CD = BC + AD = \dfrac{P}{2} = 15$, поэтому $CD = 15 - 10 = 5$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(-2;\ 5)$ и $\vec{b}\,(-5;\ -1)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: 5

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot (-5) + 5 \cdot (-1) = 5$.

3 Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объём отсечённой треугольной призмы равен 48. Найдите объём исходной призмы.



Ответ: 192

Решение. Основание отсечённой призмы — треугольник, подобный основанию исходной с коэффициентом $\frac{1}{2}$, его площадь в 4 раза меньше. Высоты призм равны, поэтому объём исходной призмы в 4 раза больше: $4 \cdot 48 = 192$.

4 В сборнике билетов по биологии всего 125 билетов, в 40 из них встречается вопрос по теме «Генетика». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по этой теме.

Ответ: 0,68

Решение. Билетов без вопроса по этой теме $125 - 40 = 85$, $P = \frac{85}{125} = 0{,}68$.

5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,5. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

Ответ: 0,0625

Решение. Выстрелы независимы: $P = 0{,}5 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}0625$.

6 Найдите корень уравнения $6^{x+4} = 36$.

Ответ: -2

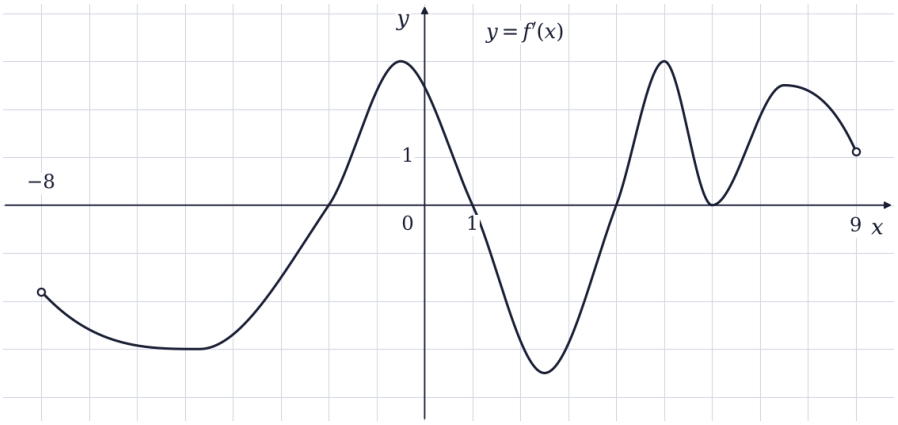
Решение. $36 = 6^2$, поэтому $x + 4 = 2$, $x = -2$.

7 Найдите значение выражения $\log_5 175 - \log_5 7$.

Ответ: 2

Решение. $\log_5 175 - \log_5 7 = \log_5 \dfrac{175}{7} = \log_5 25 = 2$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8;\ 9)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 3

Решение. Точки экстремума — нули производной, в которых она меняет знак: $-2;\ 1;\ 4$. В точке 6 график f' касается оси абсцисс без смены знака, это не экстремум. Всего 3.

9 Масса радиоактивного изотопа в образце уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа (в мг), t — время, прошедшее от начального момента (в минутах), T — период полураспада (в минутах). Начальная масса изотопа $m_0 = 160$ мг, период полураспада $T = 6$ мин. Через сколько минут масса изотопа станет равной 2,5 мг?

Ответ: 36

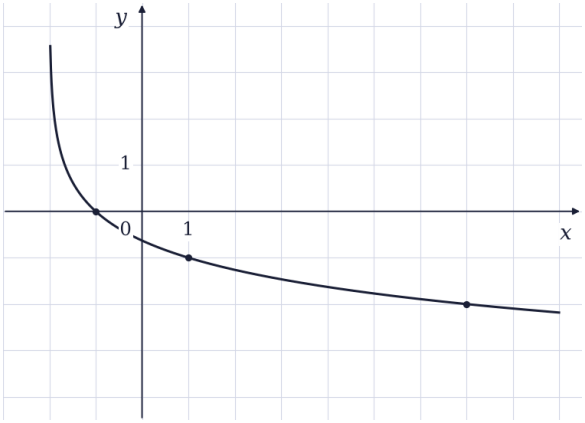
Решение. $160 \cdot 2^{-t/6} = 2{,}5 \iff 2^{-t/6} = 2^{-6} \iff t = 36$.

10 Смешав 45-процентный и 55-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 39-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 80-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 59-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 45-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: 9

Решение. Пусть x кг — масса 45-процентного раствора, y кг — 55-процентного. Тогда $0{,}45x + 0{,}55y = 0{,}39(x + y + 10)$ и $0{,}45x + 0{,}55y + 8 = 0{,}59(x + y + 10)$. Вычитая, получим $x + y + 10 = 40$, откуда $x = 9$, $y = 21$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = -\log_a(x+b)$. Найдите $f(727)$.



Ответ: -6

Решение. $\log_a(x+b) = 0$ при $x+b=1$; график пересекает ось абсцисс в точке $x=-1$, поэтому $b=2$. По точке $(7;\ -2)$ находим $a=3$. $f(727) = -\log_3 729 = -6$.

12 Найдите точку максимума функции y = 3ln x − x + 37.

Ответ: 3

Решение. Область определения: x > 0. Производная y′ = 3/x − 1. Она положительна при 0 < x < 3 и отрицательна при x > 3. Точка максимума x = 3.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $2\cos^2 x - 5\sin(\pi - x) = 5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$**; б)** $-\dfrac{5\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\sin(\pi - x) = \sin x$, а $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$2\left(1 - \sin^2 x\right) - 5\sin x = 5 \iff 2\sin^2 x + 5\sin x + 3 = 0.$$

Отсюда $\sin x = -1$ или $\sin x = -1{,}5$. Уравнение $\sin x = -1{,}5$ корней не имеет, так как $|-1{,}5| > 1$.

Если $\sin x = -1$, то $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\dfrac{3\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после

деления на π получаем неравенства для k).

$-3\pi \leqslant -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k \leqslant -\dfrac{3\pi}{2} \iff -\dfrac{5}{4} \leqslant k \leqslant -\dfrac{1}{2}, k \in \{-1\}$: $x=-\dfrac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{5\pi}{2}$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 6, боковое ребро равно 9. Точка M — середина ребра SC.

а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости SAC.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BDM.

Ответ: б) $\dfrac{27\sqrt{2}}{2}$

Решение. а) Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Диагонали квадрата перпендикулярны: $BD \perp AC$. Пирамида правильная, поэтому её высота — отрезок SO, и $SO \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и SO плоскости SAC, значит, $BD \perp (SAC)$.

б) Плоскость BDM пересекает пирамиду по треугольнику BDM. Отрезок OM — средняя линия треугольника SAC: $OM=\dfrac{SA}{2}=\dfrac{9}{2}$. Прямая OM лежит в плоскости SAC, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$, то есть OM — высота треугольника BDM. $BD=6\sqrt{2}$, $S_{BDM}=\dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot\dfrac{9}{2}=\dfrac{27\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: б) $\dfrac{27\sqrt{2}}{2}$.

15 Решите неравенство $\dfrac{3^x+9}{3^x-9}+\dfrac{3^x-9}{3^x+9} \geq \dfrac{4\cdot 3^{x+1}+144}{9^x-81}$.

Ответ: $\{1\} \cup (2;\ +\infty)$

Решение. $t=3^x>0, t \neq 9$. Общий знаменатель t^2-81:

$\dfrac{(t+9)^2+(t-9)^2-12t-144}{t^2-81} \geq 0 \iff \dfrac{2(t-3)^2}{(t-9)(t+9)} \geq 0$. Так как $t+9>0$: $t=3$ или $t>9$, то есть $x=1$ или $x>2$.

16 15 января взят кредит 2 млн руб. (1-го числа долг растёт на 3 %, со 2-го по 14-е — платёж). Долг на 15-е число:

Дата	**15.01**	**15.02**	**15.03**	**15.04**	**15.05**
Долг, % от кредита	100	90	70	40	0

Найдите общую сумму выплат.

Ответ: 2 180 000 руб.

Решение. Проценты начислялись на долги $100+90+70+40=300\,\%$ от S: $0{,}03\cdot 3\cdot 2=0{,}18$. $\Sigma=2{,}18$ млн руб.

17 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD.

а) Докажите, что $AB=2AD$.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AD=10$, $AK=16$.

Ответ: б) 192

Решение. а) Прямые AB и CD параллельны, поэтому $\angle AKD=\angle KAB$ как накрест лежащие углы. AK — биссектриса, поэтому $\angle KAB=\angle KAD$. Значит, $\angle AKD=\angle KAD$, и треугольник ADK равнобедренный: $DK=AD$. Аналогично треугольник BCK равнобедренный: $CK=BC=AD$. Тогда $AB=CD=DK+KC=2AD$.

б) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к стороне AB, равна 180°, поэтому $\angle KAB+\angle KBA=90^\circ$ и $\angle AKB=90^\circ$. Треугольник ABK и параллелограмм имеют общее основание AB и одинаковую высоту (расстояние между прямыми AB и CD), поэтому $S_{ABCD}=2S_{ABK}=AK\cdot BK$. По пункту а) $AB=2AD=20$. Из прямоугольного треугольника ABK: $BK=\sqrt{AB^2-AK^2}=\sqrt{20^2-16^2}=12$. $S_{ABCD}=16\cdot 12=192$.

Ответ: б) 192.

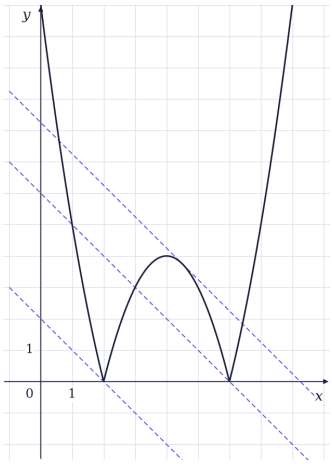
18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-8x+12\right|=-x+a$$

имеет ровно 2 различных корня.

Ответ: $a\in(2;\,6)\cup(8{,}25;\,+\infty)$

Решение. Число корней уравнения равно числу общих точек графика $y=\left|x^2-8x+12\right|$ и прямой $y=-x+a$ (угловой коэффициент -1). Поскольку $x^2-8x+12=(x-2)(x-6)$, график состоит из трёх частей: ветви параболы $y=x^2-8x+12$ при $x\leqslant 2$, ветви той же параболы при $x\geqslant 6$ и дуги $y=-(x^2-8x+12)$ при $2<x<6$.



Граничные положения прямой. Прямая проходит через точку $(2;\,0)$ при $a=2$ и через точку $(6;\,0)$ при $a=6$.

Касание с дугой: уравнение $-(x^2-8x+12)=-x+a$, то есть $x^2-9x+12+a=0$, имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю: $a=8{,}25$; точка касания $x=4{,}5$ лежит в интервале $(2;\,6)$.

Прямая с угловым коэффициентом -1 касается параболы $y=x^2-8x+12$ в точке $x=3{,}5$, которая не принадлежит крайним ветвям, поэтому касания с ветвями нет.

Перемещая прямую снизу вверх (с ростом a) и подсчитывая общие точки с графиком, получаем:

a	$a<2$	2	$(2;\,6)$	6	$(6;\,8{,}25)$	$8{,}25$	$a>8{,}25$
Число корней	0	1	2	3	4	3	2

Ровно 2 корня получается при $a\in(2;\,6)\cup(8{,}25;\,+\infty)$.

Ответ: $a\in(2;\,6)\cup(8{,}25;\,+\infty)$.

19

Неотрицательные целые числа x и y удовлетворяют равенству 2x+3y=30.

а) Может ли x равняться 0?

б) Может ли x равняться 1?

в) Сколько всего упорядоченных пар (x,y) удовлетворяет равенству?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6

Решение. По модулю 2 число y обязано быть чётным. Из y≥0 и 3y≤30 получаем y∈{0,2,4,6,8,10}. Каждое из этих шести значений даёт неотрицательное целое x=(30−3y)/2. При y=10 получаем x=0; при x=1 пришлось бы взять y=28/3, что невозможно.