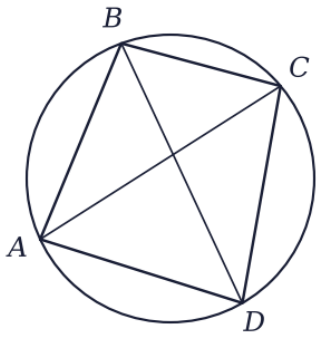
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 58°, угол CAD равен 69°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 127

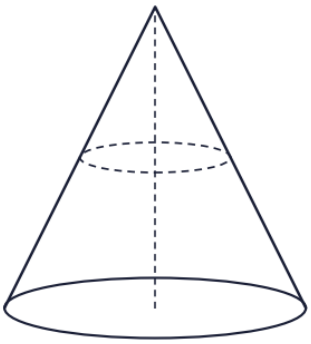
Решение. Вписанные углы CBD и CAD опираются на одну дугу CD, поэтому $\angle CBD = \angle CAD = 69^\circ$. Тогда $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 58^\circ + 69^\circ = 127^\circ$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(5;\ -3)$ и $\vec{b}\,(5;\ -6)$. Найдите длину вектора $\vec{a} + 3\vec{b}$.

Ответ: 29

Решение. $\vec{a} + 3\vec{b} = (20;\ -21)$, $|\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{400 + 441} = 29$.

3 Через середину высоты конуса параллельно основанию проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Объём меньшего конуса равен 20. Найдите объём исходного конуса.



Ответ: 160

Решение. Меньший конус подобен исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$, объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия: $V = 8 \cdot 20 = 160$.

4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют 9 спортсменов из Финляндии, 4 спортсмена из Дании и 12 спортсменов из Швеции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Ответ: 0,48

Решение. Всего спортсменов $9 + 4 + 12 = 25$, $P = \frac{12}{25} = 0{,}48$.

5 Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 70% этих стёкол, вторая — 30%. Первая фабрика выпускает 1% бракованных стёкол, а вторая — 5%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ: 0,022

Решение. По формуле полной вероятности: $P = 0{,}7 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}05 = 0{,}022$.

6 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-6} = 27$.

Ответ: 3

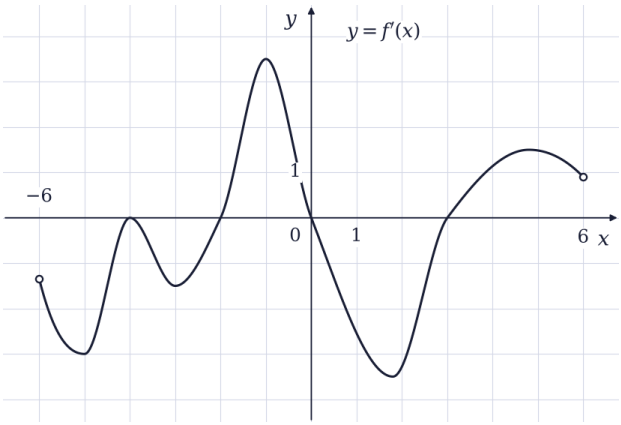
Решение. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-6} = 3^{6-x}$, $27 = 3^3$. Тогда $6 - x = 3$, $x = 3$.

7 Найдите значение выражения $\log_2 3 - \log_2 24$.

Ответ: -3

Решение. $\log_2 3 - \log_2 24 = \log_2 \dfrac{3}{24} = \log_2 0{,}125 = -3$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6;\ 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: 3

Решение. Функция возрастает там, где $f'(x) > 0$ (касание оси без смены знака промежуток не разрывает): $(-2;\ 0)$, $(3;\ 6)$. Наибольшая длина равна 3.

9 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 4 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 3 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 24$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}5$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 54 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: 3

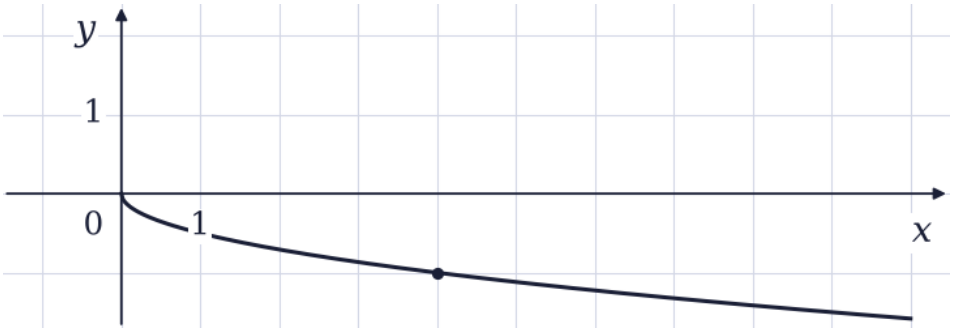
Решение. $RC = 3 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 12$. $54 = 1{,}5 \cdot 12 \cdot \log_2 \dfrac{24}{U}$, откуда $\log_2 \dfrac{24}{U} = 3$, $U = \dfrac{24}{8} = 3$.

10 Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 120 литров она заполняет на 8 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: 6

Решение. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{120}{x}-\dfrac{120}{x+4}=8$, положительный корень $x=6$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x)=k\sqrt{x}$. Найдите $f(36)$.



Ответ: -3

Решение. График проходит через точку $(4;\,-1)$: $-1=k\sqrt{4}$, $k=-0{,}5$. $f(36)=-0{,}5\cdot\sqrt{36}=-3$.

12 Найдите точку максимума функции $y = x^2e^{3-x}$ на промежутке $(0;\,+\infty)$.

Ответ: 2

Решение. Производная $y' = e^{3-x}x(2-x)$. При $0 < x < 2$ она положительна, при $x > 2$ отрицательна. Значит, точка максимума $x = 2$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x-4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\,\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$**; б)** $3\pi;\,4\pi$

Решение. а) По формуле приведения $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, а $\cos 2x=1-2\sin^2 x$. Уравнение принимает вид

$$\left(1-2\sin^2 x\right)-4\sin x=1\ \Leftrightarrow\ \sin^2 x+2\sin x=0.$$

Отсюда $\sin x = 0$ или $\sin x = -2$. Уравнение $\sin x = -2$ корней не имеет, так как $|-2| > 1$. Если $\sin x = 0$, то $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \dfrac{9\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$3\pi \leqslant \pi k \leqslant \dfrac{9\pi}{2} \iff 3 \leqslant k \leqslant \dfrac{9}{2}, k \in \{3, 4\}$: $x = 3\pi$, $x = 4\pi$.

Ответ: а) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) 3π; 4π.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 12, боковое ребро равно 14. Точка M — середина ребра SC.

а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости SAC.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BDM.

Ответ: б) $42\sqrt{2}$

Решение. а) Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Диагонали квадрата перпендикулярны: $BD \perp AC$. Пирамида правильная, поэтому её высота — отрезок SO, и $SO \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и SO плоскости SAC, значит, $BD \perp (SAC)$.

б) Плоскость BDM пересекает пирамиду по треугольнику BDM. Отрезок OM — средняя линия треугольника SAC: $OM = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{14}{2}$. Прямая OM лежит в плоскости SAC, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$, то есть OM — высота треугольника BDM. $BD = 12\sqrt{2}$, $S_{BDM} = \dfrac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} \cdot \dfrac{14}{2} = 42\sqrt{2}$.

Ответ: б) $42\sqrt{2}$.

15 Решите неравенство

$$\frac{4^x - 6 \cdot 2^{x+1} + 32}{\log_5(x+4)} \leqslant 0.$$

Ответ: $(-4;\ -3) \cup [2;\ 3]$

Решение. Область допустимых значений: $x + 4 > 0$ и $\log_5(x+4) \neq 0$, то есть $x > -4$, $x \neq -3$.

$6 \cdot 2^{x+1} = 12 \cdot 2^x$, числитель раскладывается на множители: $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = (2^x - 4)(2^x - 8)$.

Функции $y = 2^t$ и $y = \log_5 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак $2^x - 4$ совпадает со знаком $x - 2$, знак $2^x - 8$ — со знаком $x - 3$, знак $\log_5(x+4) = \log_5(x+4) - \log_5 1$ — со знаком $x + 3$. Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x+3} \leqslant 0, \quad x > -4.$$

Метод интервалов: на $(-4;\ -3)$ дробь отрицательна; на $(-3;\ 2)$ дробь положительна; на $(2;\ 3)$ дробь отрицательна; на $(3;\ +\infty)$ дробь положительна; в точках $x=2$, $x=3$ числитель равен нулю.
Ответ: $(-4;\ -3)\cup[2;\ 3]$.

16

Кредит 4 млн руб. на 4 года (стандартная схема, долг уменьшается равномерно), r — целое. Найдите наибольшее r, при котором каждый платёж не больше 2 млн руб.
Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 25 %

Решение. Наибольший — первый платёж: $1+4\cdot\dfrac{r}{100}\le 2\Rightarrow r\le 25$.

17

Окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны CA и CB в точках M и N соответственно.
а) Докажите, что треугольник CMN подобен треугольнику CBA.
б) Найдите MN, если $AB=12, CA=10, CB=8, CM=4$.

Ответ: б) 6

Решение. а) $\angle CMN=180^\circ-\angle AMN=\angle ABN$ (четырёхугольник $ABNM$ вписанный), угол C общий. б) $k=\dfrac{CM}{CB}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$, $MN=\dfrac{1}{2}AB=6$.

18

Найдите все a, при которых уравнение x+1/x=a имеет ровно два различных действительных корня.

Ответ: a∈(−∞;−2)∪(2;+∞)

Решение. ОДЗ: x≠0. Умножив на x, получаем x²−ax+1=0. Дискриминант a²−4 положителен ровно при |a|>2. При этом оба корня ненулевые, так как произведение равно 1. При |a|=2 корень один, при |a|<2 корней нет.

19

Квадрат натурального числа не превосходит 1000.
а) Может ли он равняться 2025, если убрать ограничение 1000?
б) Может ли квадрат натурального числа равняться 2026?
в) Сколько положительных квадратов не превосходит 1000?

Ответ: а) да; б) нет; в) 31

Решение. а) 2025=45². б) Остаток квадрата при делении на 4 равен 0 или 1, а 2026 даёт остаток 2. в) 31²=961≤1000, а 32²=1024>1000. Это квадраты чисел от 1 до 31, всего 31.