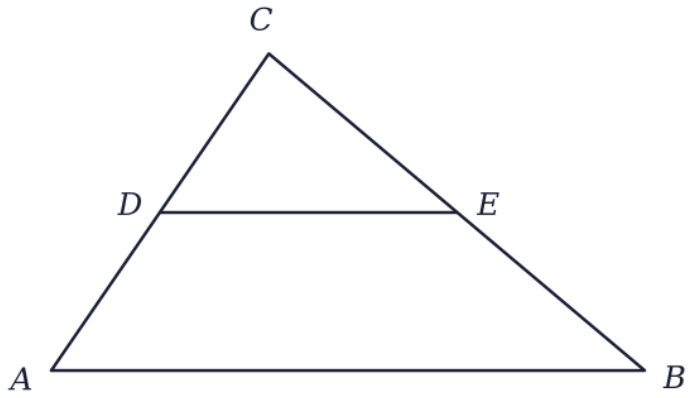
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

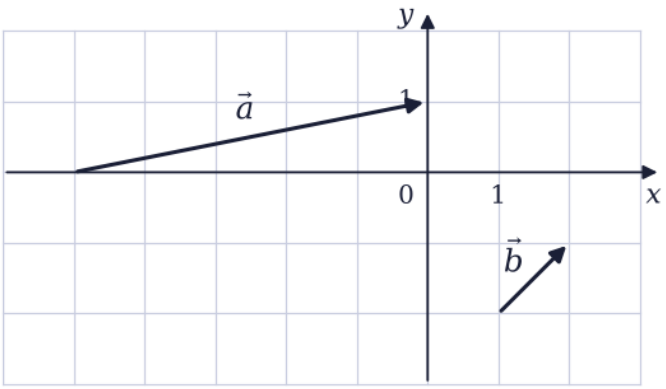
1 Площадь треугольника ABC равна 100, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь треугольника CDE.



Ответ: 25

Решение. Треугольник CDE подобен треугольнику CAB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, поэтому его площадь в 4 раза меньше: $\frac{100}{4} = 25$.

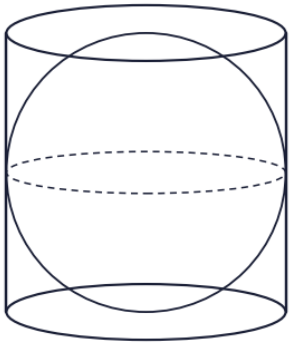
2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Ответ: 6

Решение. По рисунку $\vec{a}\,(5;\,1), \vec{b}\,(1;\,1)$. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 6$.

3 В цилиндр вписан шар: шар касается обоих оснований цилиндра и его боковой поверхности. Объём цилиндра равен 21. Найдите объём шара.



Ответ: 14

Решение. Высота цилиндра равна диаметру шара: $V_{\text{цил}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 21$, откуда $\pi r^3 = 10{,}5$; $V_{\text{шара}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 14$.

4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют 3 спортсмена из Финляндии, 9 спортсменов из Дании и 12 спортсменов из Швеции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Ответ: 0,5

Решение. Всего спортсменов $3 + 9 + 12 = 24$, $P = \dfrac{12}{24} = 0{,}5$.

5 В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Ответ: 0,9975

Решение. Оба автомата неисправны с вероятностью $0{,}05^2 = 0{,}0025$. Хотя бы один исправен: $1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$.

6 Найдите корень уравнения $\log_3(2x + 5) = \log_3(x - 3) + 1$.

Ответ: 14

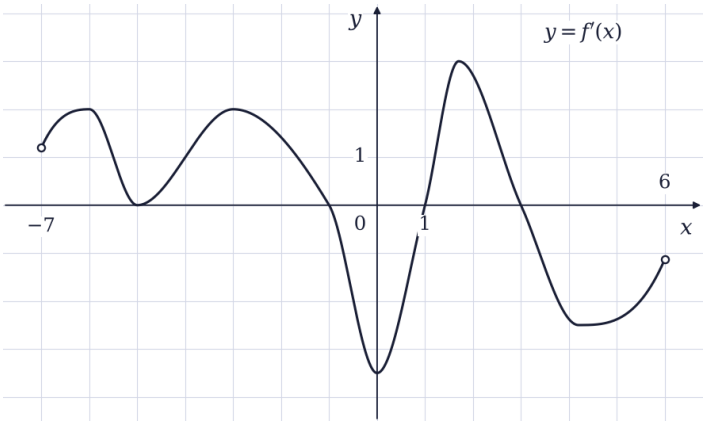
Решение. $1 = \log_3 3$, поэтому $2x + 5 = 3(x - 3)$, откуда $x = 14$; при этом значении оба аргумента логарифмов положительны.

7 Найдите значение выражения $2^{\log_4 36}$.

Ответ: 6

Решение. $\log_4 36 = \log_{2^2} 6^2 = \log_2 6$, поэтому выражение равно $2^{\log_2 6} = 6$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7;\ 6)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 2

Решение. В точке максимума производная меняет знак с «+» на «−». Таких точек 2: $-1;\ 3$.

9 Масса радиоактивного изотопа в образце уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа (в мг), t — время, прошедшее от начального момента (в минутах), T — период полураспада (в минутах). Начальная масса изотопа $m_0 = 120$ мг, период полураспада $T = 12$ мин. Через сколько минут масса изотопа станет равной 7,5 мг?

Ответ: 48

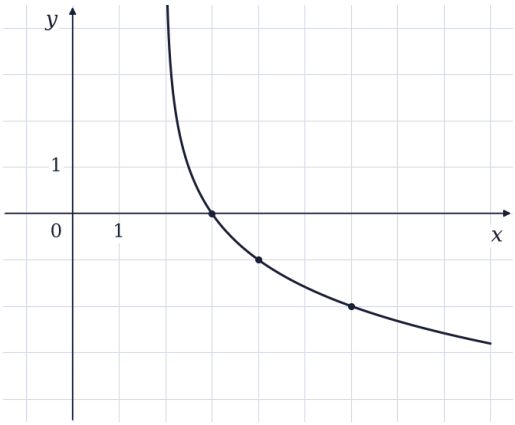
Решение. $120 \cdot 2^{-t/12} = 7{,}5 \iff 2^{-t/12} = 2^{-4} \iff t = 48$.

10 Смешав 15-процентный и 70-процентный растворы кислоты и добавив 5 кг чистой воды, получили 18-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 5 кг воды добавили 5 кг 60-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 28-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 15-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: 22

Решение. Пусть x кг — масса 15-процентного раствора, y кг — 70-процентного. Тогда $0{,}15x + 0{,}7y = 0{,}18(x + y + 5)$ и $0{,}15x + 0{,}7y + 3 = 0{,}28(x + y + 5)$. Вычитая, получим $x + y + 5 = 30$, откуда $x = 22$, $y = 3$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = -\log_a(x+b)$. Найдите $f(66)$.



Ответ: -6

Решение. $\log_a(x+b) = 0$ при $x+b=1$; график пересекает ось абсцисс в точке $x=3$, поэтому $b=-2$. По точке $(6;\ -2)$ находим $a=2$. $f(66) = -\log_2 64 = -6$.

12 Найдите наименьшее значение функции y = x + 9/x + 31 на отрезке [1,5; 9].

Ответ: 37

Решение. На отрезке x > 0. Производная y′ = 1 − 9/x^2 отрицательна при x < 3 и положительна при x > 3. Минимум достигается при x = 3; y(3) = 3 + 3 + 31 = 37.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; **б)** $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{6}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$, а $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

Уравнение принимает вид

$$\left(1 - 2\sin^2 x\right) - 3\sin x = 2 \iff 2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0.$$

Отсюда $\sin x = -\frac{1}{2}$ или $\sin x = -1$.

Если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Если $\sin x = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$\pi \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leqslant \frac{5\pi}{2} \iff \frac{7}{12} \leqslant k \leqslant \frac{4}{3}, k \in \{1\}: x = \frac{11\pi}{6}$.

$\pi \leqslant -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant \frac{5\pi}{2} \iff \frac{11}{12} \leqslant n \leqslant \frac{5}{3}, n \in \{1\}: x = \frac{7\pi}{6}$.

$\pi \leqslant -\frac{\pi}{2} + 2\pi m \leqslant \frac{5\pi}{2} \iff \frac{3}{4} \leqslant m \leqslant \frac{3}{2}, m \in \{1\}: x = \frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 8 на ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 3 : 1$.

а) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости ACC_1.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью BDM.

Ответ: б) $8\sqrt{34}$

Решение. а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD \perp AC$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1 \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, значит, $BD \perp (ACC_1)$. Плоскость BDM проходит через прямую BD, перпендикулярную плоскости ACC_1, поэтому плоскости BDM и ACC_1 перпендикулярны.

б) Точка M лежит на ребре CC_1, поэтому плоскость BDM пересекает грани куба по отрезкам BD, BM и DM, и сечение — треугольник BDM. Пусть O — центр квадрата $ABCD$; прямая OM лежит в плоскости ACC_1, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$, и OM — высота треугольника BDM. $OC = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}, CM = 6, OM = \sqrt{OC^2 + CM^2} = \sqrt{32 + 36} = 2\sqrt{17}, BD = 8\sqrt{2}$. $S_{BDM} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{17} = 8\sqrt{34}$.

Ответ: б) $8\sqrt{34}$.

15 Решите неравенство $\dfrac{8^x - 3 \cdot 4^{x+1} + 3 \cdot 2^{x+4} - 64}{x^2 - 4x + 4} \geq 0$.

Ответ: $(2;\ +\infty)$

Решение. $t = 2^x > 0$: числитель равен $t^3 - 12t^2 + 48t - 64 = (t-4)^3 = (2^x - 4)^3$, знаменатель $(x-2)^2 > 0$ при $x \ / \ 2$. Знак $(2^x - 4)^3$ совпадает со знаком $x - 2$, поэтому $x \geq 2$. Точка $x = 2$ — нуль знаменателя, её исключаем.

16 Кредит 6 млн руб. на 3 года под 20 % (стандартная схема), долг каждый июль уменьшается на одну и ту же величину. Найдите второй платёж.
Стандартная схема: в начале каждого периода долг увеличивается на указанный процент; затем вносится платёж. В конце срока долг равен нулю.

Ответ: 2 800 000 руб.

Решение. Долг уменьшается на 2 млн. Платежи: $2 + 0{,}2 \cdot 6 = 3{,}2$; $2 + 0{,}2 \cdot 4 = 2{,}8$; $2 + 0{,}2 \cdot 2 = 2{,}4$. Второй платёж $2{,}8$ млн руб.

17 Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке W, I — центр вписанной окружности.
а) Докажите, что $WB = WI$.
б) Найдите WI, если $BC = 8$ и $\angle BAC = 120^\circ$.

Ответ: б) 8

Решение. а) $\angle WBI = \angle WBC + \angle CBI = \dfrac{\angle A}{2} + \dfrac{\angle B}{2}$ и $\angle WIB = \dfrac{\angle A}{2} + \dfrac{\angle B}{2}$ (внешний угол треугольника ABI). б) W — середина дуги BC, $\angle BWC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, $WB = WC$, треугольник BWC равносторонний: $WI = WB = BC = 8$.

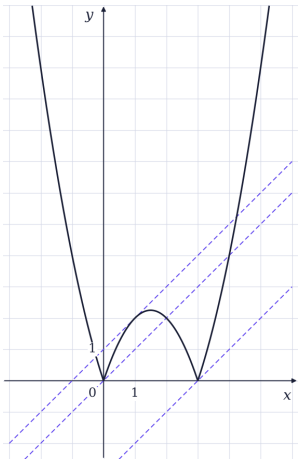
18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 - 3x\right| = x + a$$

имеет ровно 4 различных корня.

Ответ: $a \in (0;\ 1)$

Решение. Число корней уравнения равно числу общих точек графика $y = \left|x^2 - 3x\right|$ и прямой $y = x + a$ (угловой коэффициент 1). Поскольку $x^2 - 3x = x(x - 3)$, график состоит из трёх частей: ветви параболы $y = x^2 - 3x$ при $x \leqslant 0$, ветви той же параболы при $x \geqslant 3$ и дуги $y = -(x^2 - 3x)$ при $0 < x < 3$.



Граничные положения прямой. Прямая проходит через точку $(0;\,0)$ при $a=0$ и через точку $(3;\,0)$ при $a=-3$.

Касание с дугой: уравнение $-(x^2-3x)=x+a$, то есть $x^2-2x+a=0$, имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю: $a=1$; точка касания $x=1$ лежит в интервале $(0;\,3)$.

Прямая с угловым коэффициентом 1 касается параболы $y=x^2-3x$ в точке $x=2$, которая не принадлежит крайним ветвям, поэтому касания с ветвями нет.

Перемещая прямую снизу вверх (с ростом a) и подсчитывая общие точки с графиком, получаем:

a	$a<-3$	-3	$(-3;\,0)$	0	$(0;\,1)$	1	$a>1$
Число корней	0	1	2	3	4	3	2

Ровно 4 корня получается при $a\in(0;\,1)$.

Ответ: $a\in(0;\,1)$.

19

С шахматной доски 8×8 убрали две клетки и хотят покрыть остальные домино 1×2.

а) Можно ли покрыть доску, если убрали два противоположных угла?

б) Можно ли покрыть доску, если убрали две соседние клетки в левом верхнем углу?

в) Какое наибольшее число домино можно разместить после удаления двух противоположных углов?

Ответ: а) нет; б) да; в) 30

Решение. Противоположные углы одного цвета. После их удаления клеток одного цвета 30, другого — 32, а каждое домино покрывает по одной клетке каждого цвета. Поэтому полное покрытие невозможно и домино не больше 30.

Если удалены две соседние клетки в первом ряду, остальные шесть клеток ряда покрываются тремя домино, а остальные семь рядов по восемь клеток — горизонтальными домино. Это доказывает б).

Для двух противоположных углов покроем горизонтально по шесть клеток крайних рядов тремя домино, оставив в каждом ряду одну клетку, и все шесть средних рядов — 24 домино. Итого 30.