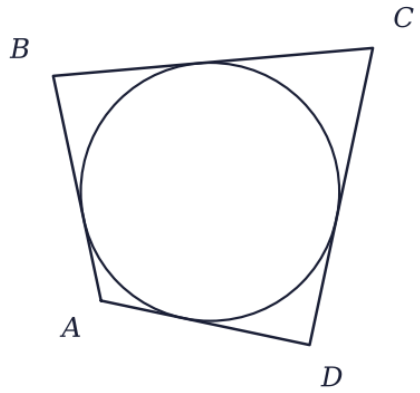
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 9, CD = 8$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



Ответ: 34

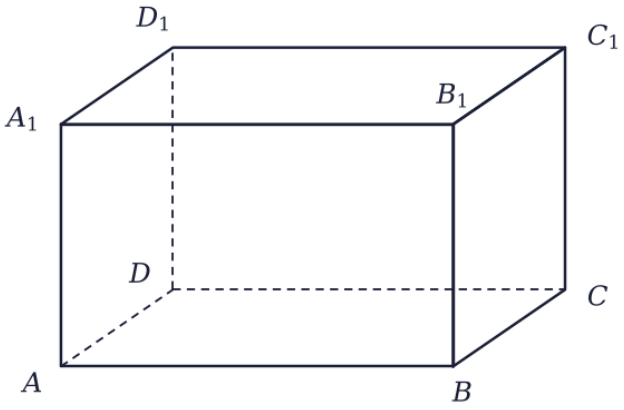
Решение. В описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны: $BC + AD = AB + CD = 17$. Периметр равен $2 \cdot 17 = 34$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(-5;\ -6)$ и $\vec{b}\,(7;\ -7)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: 7

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5 \cdot 7 + (-6) \cdot (-7) = 7$.

3 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 1$, $BC = 12$, $AA_1 = 12$. Найдите длину диагонали AC_1.



Ответ: 17

Решение. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений: $AC_1 = \sqrt{1^2 + 12^2 + 12^2} = \sqrt{289} = 17$.

4 В среднем из 200 блендеров, поступивших в продажу, 5 неисправны. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля прибор исправен.

Ответ: 0,975

Решение. $P = \dfrac{200 - 5}{200} = 0{,}975$.

5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,5. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первые две мишени и не попадёт в две последние.

Ответ: 0,0625

Решение. Выстрелы независимы: $P = 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}0625$.

6 Найдите корень уравнения $\sqrt{71 - 2x} = 7$.

Ответ: 11

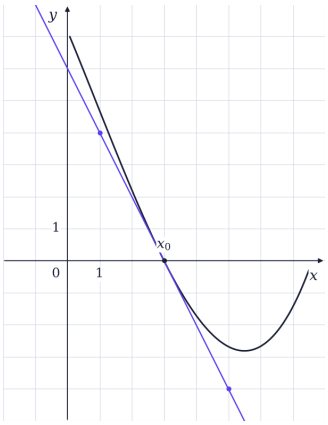
Решение. Возведём обе части в квадрат: $71 - 2x = 49$, $2x = 22$, $x = 11$.

7 Найдите значение выражения $7\operatorname{tg} 47^\circ \cdot \operatorname{tg} 137^\circ$.

Ответ: -7

Решение. $\operatorname{tg} 137^\circ = -\operatorname{ctg} 47^\circ$, а $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, поэтому выражение равно -7.

8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: -2

Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Касательная проходит через точки $(1;\ 4)$ и $(5;\ -4)$: $k = \dfrac{-4-4}{5-1} = -2$.

9 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 11t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 2 метров?

Ответ: 1,8

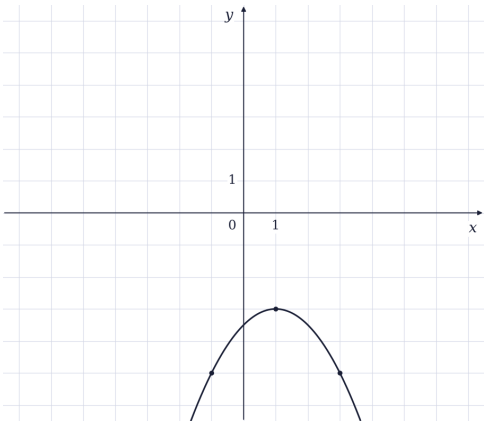
Решение. $h(t) \geqslant 2 \iff 5t^2 - 11t + 2 \leqslant 0 \iff 0{,}2 \leqslant t \leqslant 2$. Мяч находится не ниже 2 м в течение $2 - 0{,}2 = 1{,}8$ с.

10 Смешав 45-процентный и 55-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 60-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 56-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 45-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: 2

Решение. Пусть x кг — масса 45-процентного раствора, y кг — 55-процентного. Тогда $0{,}45x + 0{,}55y = 0{,}36(x + y + 10)$ и $0{,}45x + 0{,}55y + 6 = 0{,}56(x + y + 10)$. Вычитая, получим $x + y + 10 = 30$, откуда $x = 2$, $y = 18$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-10)$.



Ответ: -63,5

Решение. Вершина параболы — точка $(1;\ -3)$, поэтому $f(x) = a(x-1)^2 + (-3)$. По точке $(2;\ -7/2)$: $a = -0{,}5$. $f(-10) = -0{,}5 \cdot (-10-1)^2 + (-3) = -63{,}5$.

12 Найдите точку максимума функции y = $(x-2)^3 - 27(x-2) + 28$.

Ответ: -1

Решение. Производная $y' = 3((x-2)^2 - 9)$. Она равна нулю при x = -1 и x = 5. Знаки производной на трёх промежутках: +, −, +. Поэтому точка максимума x = -1, точка минимума x = 5. Ответ: -1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x + 4\cos(\pi - x) = 5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$**; б)** 3π

Решение. а) По формуле приведения $\cos(\pi - x) = -\cos x$, а $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Уравнение принимает вид

$$\left(2\cos^2 x - 1\right) - 4\cos x = 5 \iff \cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0.$$

Отсюда $\cos x = -1$ или $\cos x = 3$. Уравнение $\cos x = 3$ корней не имеет, так как $|3| > 1$. Если $\cos x = -1$, то $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$\frac{3\pi}{2} \leqslant \pi + 2\pi k \leqslant 3\pi \iff \frac{1}{4} \leqslant k \leqslant 1, k \in \{1\}$: $x = 3\pi$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) 3π.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 24, а боковое ребро равно 5. Точка M — середина ребра AB.

а) Докажите, что прямая CM перпендикулярна плоскости ABB_1.

б) Найдите угол между прямой A_1C и плоскостью ABB_1.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{12\sqrt{3}}{13}$

Решение. а) Треугольник ABC равносторонний, его медиана CM является высотой: $CM \perp AB$. Призма правильная, поэтому боковое ребро AA_1 перпендикулярно плоскости основания, и $AA_1 \perp CM$. Прямая CM перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB и AA_1 плоскости ABB_1, значит, $CM \perp (ABB_1)$.

б) По пункту а) M — проекция точки C на плоскость ABB_1, поэтому A_1M — проекция прямой A_1C, и искомый угол равен $\angle CA_1M$. $CM = \frac{24\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$, $A_1M = \sqrt{AA_1^2 + AM^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. В прямоугольном треугольнике CA_1M: $\operatorname{tg}\angle CA_1M = \frac{CM}{A_1M} = \frac{12\sqrt{3}}{13}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{12\sqrt{3}}{13}$.

15 Решите неравенство $\dfrac{\log_3(x+2)}{x^2-4} \geq 0$.

Ответ: $(-2;\ -1] \cup (2;\ +\infty)$

Решение. ОДЗ $x > -2$, $x \neq 2$. ~~Знак~~ $\log_3(x+2)$ совпадает со знаком $x+1$:

$\dfrac{x+1}{(x-2)(x+2)} \geq 0$ при $x > -2$.

16 15 января взят кредит 3 млн руб. на 18 месяцев: 1-го числа каждого месяца долг растёт на r %, со 2-го по 14-е — платёж, а 15-го числа долг на одну и ту же сумму меньше, чем 15-го числа предыдущего месяца ($r = 2$). Найдите общую сумму выплат.

Ответ: 3 570 000 руб.

Решение. $\Sigma = S\left(1 + \frac{r(n+1)}{200}\right) = 3\left(1 + \frac{0{,}02 \cdot 19}{2}\right) = 3 \cdot 1{,}19 = 3{,}57$ млн руб.

17 Две окружности радиусов 9 и 1 касаются внешним образом в точке K. Прямая касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK вторично пересекает первую окружность в точке D, прямая AK вторично пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB.

Ответ: б) $5{,}4$

Решение. а) Общая касательная к окружностям в точке K пересекает AB в точке M; $MA = MK = MB$ как отрезки касательных, поэтому $\angle AKB = 90^\circ$. Тогда $\angle AKD = 90^\circ$ и $\angle BKC = 90^\circ$, значит, AD и BC — диаметры своих окружностей. Обе прямые перпендикулярны касательной AB, поэтому $AD \parallel BC$. б) $AB = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr} = 6$. Точка K делит O_1O_2 в отношении $9:1$, расстояния от O_1 и O_2 до AB равны 9 и 1, поэтому расстояние от K до AB равно $\dfrac{1\cdot 9 + 9\cdot 1}{10} = 1{,}8$. $S_{AKB} = \dfrac{1}{2}\cdot 6 \cdot 1{,}8 = 5{,}4$.

18 Найдите все a, при которых уравнение x²+ax+a=0 имеет ровно один положительный корень.

Ответ: a∈(−∞;0)

Решение. Если a<0, произведение корней равно a<0, значит, дискриминант положителен и один корень положителен, другой отрицателен. При a=0 единственный корень равен 0. При a>0 произведение положительно, а сумма корней −a<0; положительных корней быть не может.

19 Из трёхзначного числа вычли число, полученное записью его цифр в обратном порядке; обе записи должны быть трёхзначными.

а) Может ли разность равняться 198?

б) Может ли разность равняться 100?

в) Какова наибольшая разность?

Ответ: а) да; б) нет; в) 792

Решение. Обозначим первую и последнюю цифры через a и c; они не равны нулю. Разность равна (100a+10b+c)−(100c+10b+a)=99(a−c).

а) 321−123=198. б) 100 не делится на 99. в) Наибольшее a−c=9−1=8; пример 901−109=792.