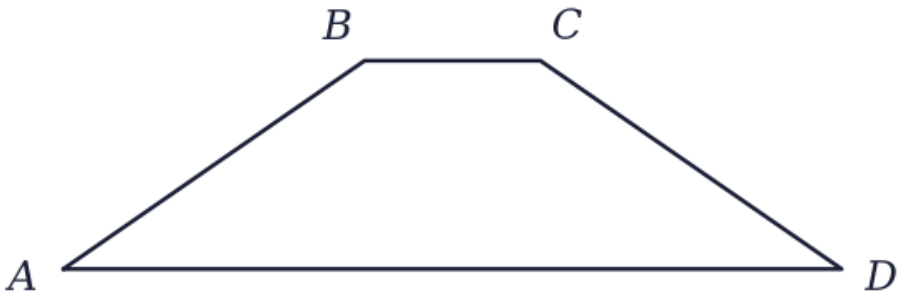
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 31 и 7 соответственно, а боковая сторона равна 13. Найдите площадь трапеции.



Ответ: 95

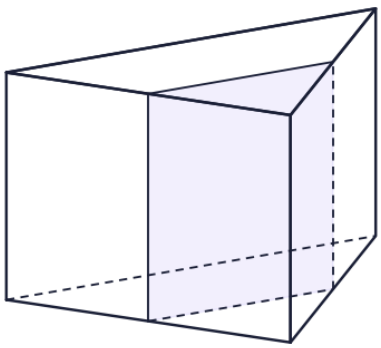
Решение. Проекция боковой стороны на большее основание равна $\dfrac{31-7}{2}=12$, высота $h=\sqrt{13^2-12^2}=5$, $S=\dfrac{31+7}{2}\cdot 5=95$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(-2;\ 3)$ и $\vec{b}\,(3;\ -6)$. Найдите длину вектора $\vec{a}-2\vec{b}$.

Ответ: 17

Решение. $\vec{a}-2\vec{b}=(-8;\ 15)$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{64+225}=17$.

3 Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 18. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Ответ: 9

Решение. Периметр основания отсечённой призмы вдвое меньше периметра основания исходной (стороны — средние линии и половины сторон), высоты равны. Поэтому площадь боковой поверхности вдвое меньше: $\frac{18}{2} = 9$.

4 В коробке лежат 50 одинаковых на вид чайных пакетиков: 19 пакетиков с зелёным чаем, 29 — с белым, остальные — с чёрным. Найдите вероятность того, что случайно выбранный пакетик окажется с чёрным чаем.

Ответ: 0,04

Решение. Пакетиков с чёрным чаем $50 - 19 - 29 = 2$; $P = \frac{2}{50} = 0{,}04$.

5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первые три мишени и не попадёт в последнюю.

Ответ: 0,0729

Решение. Выстрелы независимы: $P = 0{,}9^3 \cdot 0{,}1 = 0{,}0729$.

6 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-5} = 27$.

Ответ: 2

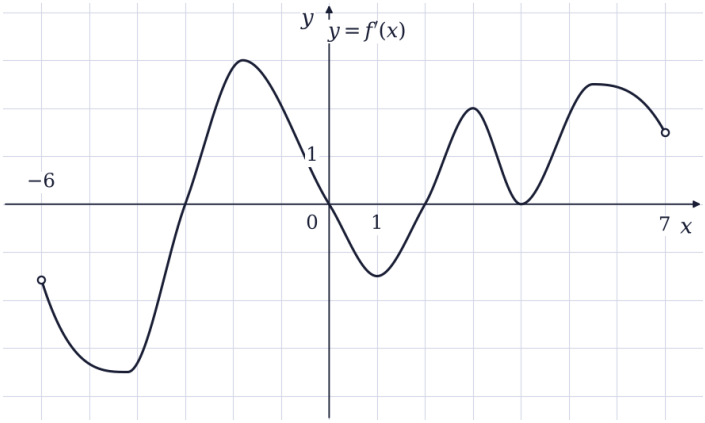
Решение. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-5} = 3^{5-x}$, $27 = 3^3$. Тогда $5 - x = 3$, $x = 2$.

7 Найдите значение выражения $\log_{0,5} 8 - \log_{0,5} 32$.

Ответ: 2

Решение. $\log_{0,5} 8 - \log_{0,5} 32 = \log_{0,5} \frac{8}{32} = \log_{0,5} 0{,}25 = 2$.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6;\ 7)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 1

Решение. В точке максимума производная меняет знак с «+» на «−». Такая точка одна: $x = 0$.

9 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 32$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 35 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: 8

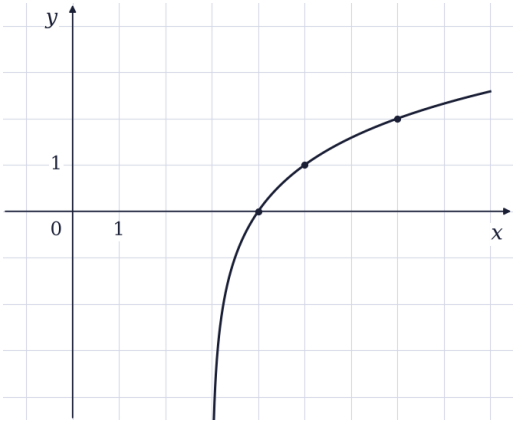
Решение. $RC = 5 \cdot 10^{6} \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 25$. $35 = 0{,}7 \cdot 25 \cdot \log_2 \dfrac{32}{U}$, откуда $\log_2 \dfrac{32}{U} = 2$, $U = \dfrac{32}{4} = 8$.

10 Два велосипедиста одновременно отправились в 80-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 2 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 8

Решение. Пусть v — скорость второго. $\dfrac{80}{v} - \dfrac{80}{v+2} = 2 \iff 2v^2 + 4v - 160 = 0$, положительный корень $v = 8$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x)=\log_a(x+b)$. Найдите $f(11)$.



Ответ: 3

Решение. $\log_a(x+b)=0$ при $x+b=1$; график пересекает ось абсцисс в точке $x=4$, поэтому $b=-3$. По точке $(7;\ 2)$ находим $a=2$. $f(11)=\log_2 8=3$.

12 Найдите точку минимума функции y = $(x-2)^3$ − 27(x − 2) + 25.

Ответ: 5

Решение. Производная y′ = 3($(x-2)^2$ − 9). Она равна нулю при x = -1 и x = 5. Знаки производной на трёх промежутках: +, −, +. Поэтому точка максимума x = -1, точка минимума x = 5. Ответ: 5.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; **б)** $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, а $\cos 2x=1-2\sin^2 x$.

Уравнение принимает вид

$$\left(1-2\sin^2 x\right)+\sin x=0 \iff 2\sin^2 x-\sin x-1=0.$$

Отсюда $\sin x=-\frac{1}{2}$ или $\sin x=1$.

Если $\sin x=-\frac{1}{2}$, то $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Если $\sin x=1$, то $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$-\pi \leqslant -\dfrac{\pi}{6}+2\pi k \leqslant \dfrac{\pi}{2} \iff -\dfrac{5}{12} \leqslant k \leqslant \dfrac{1}{3}, k\in\{0\}\colon x=-\dfrac{\pi}{6}.$

$-\pi \leqslant -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n \leqslant \dfrac{\pi}{2} \iff -\dfrac{1}{12} \leqslant n \leqslant \dfrac{2}{3}, n\in\{0\}\colon x=-\dfrac{5\pi}{6}.$

$-\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2}+2\pi m \leqslant \dfrac{\pi}{2} \iff -\dfrac{3}{4} \leqslant m \leqslant 0, m\in\{0\}\colon x=\dfrac{\pi}{2}.$

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}; -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}; \dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 4, боковое ребро равно 8.

а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости SAC.

б) Найдите угол между прямой SB и плоскостью SAC.

Ответ: б) $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Решение. а) Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Диагонали квадрата перпендикулярны: $BD\perp AC$. Пирамида правильная, поэтому её высота — отрезок SO, и $SO\perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и SO плоскости SAC, значит, $BD\perp(SAC)$.

б) По пункту а) $BO\perp(SAC)$, поэтому SO — проекция прямой SB на плоскость SAC, и искомый угол равен $\angle BSO$. В прямоугольном треугольнике BSO: $BO=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}$, $SB=8$, $\sin\angle BSO=\dfrac{BO}{SB}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: б) $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

15 Решите неравенство $\dfrac{2^x-8}{x^2-1}\leq 0$.

Ответ: $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ 3]$

Решение. Знак 2^x-8 совпадает со знаком $x-3$: $\dfrac{x-3}{(x-1)(x+1)}\leq 0$. Метод интервалов.

16 В июле 2030 года планируется взять кредит 240 000 рублей в банке на 2 года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 50% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен 2 равными платежами?

Ответ: 216 000

Решение. Пусть X — ежегодный платёж. После последнего платежа долг равен нулю: $240\,000 \cdot 1{,}5^2 = X\,(1{,}5 + 1)$, откуда $X = 216\,000$.

17 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ACH и BCH соответственно.

а) Докажите, что $O_1O_2 = r\sqrt{2}$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

б) Найдите O_1O_2, если $AC = 9$, $BC = 12$.

Ответ: б) $3\sqrt{2}$

Решение. а) Треугольники ACH и ABC подобны (прямоугольные, с общим острым углом A), коэффициент подобия $\dfrac{AC}{AB}$; треугольники BCH и ABC подобны с коэффициентом $\dfrac{BC}{AB}$.

Поэтому радиусы вписанных окружностей равны $r_1 = r \cdot \dfrac{AC}{AB}$ и $r_2 = r \cdot \dfrac{BC}{AB}$.

Центр вписанной окружности лежит на биссектрисе угла, поэтому HO_1 и HO_2 — биссектрисы прямых углов AHC и BHC: $\angle O_1HC = \angle O_2HC = 45^\circ$, $\angle O_1HO_2 = 90^\circ$. Расстояние от O_1 до сторон угла AHC равно r_1, поэтому $HO_1 = r_1\sqrt{2}$; аналогично $HO_2 = r_2\sqrt{2}$.

По теореме Пифагора $O_1O_2^2 = 2r_1^2 + 2r_2^2 = 2r^2 \cdot \dfrac{AC^2 + BC^2}{AB^2} = 2r^2$, то есть $O_1O_2 = r\sqrt{2}$.

б) $AB = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник: $r = \dfrac{AC + BC - AB}{2} = \dfrac{9 + 12 - 15}{2} = 3$. По пункту а) $O_1O_2 = 3\sqrt{2}$.

Ответ: б) $3\sqrt{2}$.

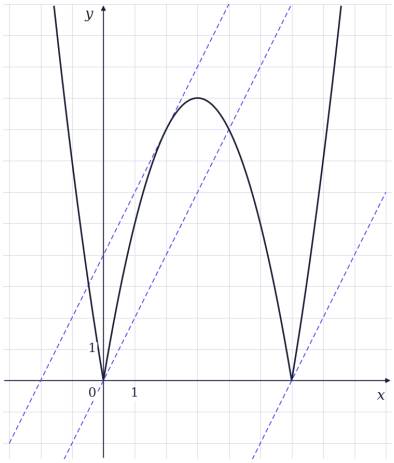
18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 - 6x\right| = 2x + a$$

имеет ровно 4 различных корня.

Ответ: $a \in (0;\ 4)$

Решение. Число корней уравнения равно числу общих точек графика $y = \left|x^2 - 6x\right|$ и прямой $y = 2x + a$ (угловой коэффициент 2). Поскольку $x^2 - 6x = x(x - 6)$, график состоит из трёх частей: ветви параболы $y = x^2 - 6x$ при $x \leqslant 0$, ветви той же параболы при $x \geqslant 6$ и дуги $y = -(x^2 - 6x)$ при $0 < x < 6$.



Граничные положения прямой. Прямая проходит через точку $(0;\ 0)$ при $a = 0$ и через точку $(6;\ 0)$ при $a = -12$.

Касание с дугой: уравнение $-(x^2 - 6x) = 2x + a$, то есть $x^2 - 4x + a = 0$, имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю: $a = 4$; точка касания $x = 2$ лежит в интервале $(0;\ 6)$.

Прямая с угловым коэффициентом 2 касается параболы $y = x^2 - 6x$ в точке $x = 4$, которая не принадлежит крайним ветвям, поэтому касания с ветвями нет.

Перемещая прямую снизу вверх (с ростом a) и подсчитывая общие точки с графиком, получаем:

a	$a < -12$	-12	$(-12;\ 0)$	0	$(0;\ 4)$	4	$a > 4$
Число корней	0	1	2	3	4	3	2

Ровно 4 корня получается при $a \in (0;\ 4)$.

Ответ: $a \in (0;\ 4)$.

19

Число 100 представляют суммой одного или нескольких последовательных натуральных чисел.

а) Возможна ли сумма четырёх чисел?

б) Возможна ли сумма пяти чисел?

в) Сколько всего таких представлений?

Ответ: а) нет; б) да; в) 3

Решение. Для k последовательных чисел, начиная с a≥1, имеем 100=ka+k(k−1)/2, то есть 200=k(2a+k−1). Поскольку k(k+1)/2≤100, достаточно проверить k=1,…,13. Целое a≥1 получается только при k=1 (a=100), k=5 (a=18) и k=8 (a=9). Представления: 100; 18+19+20+21+22; 9+10+11+12+13+14+15+16. Значит, для четырёх нельзя, для пяти можно, всего три.