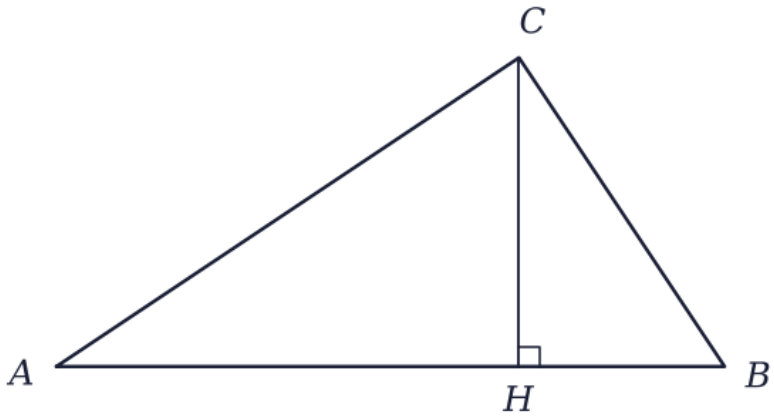
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

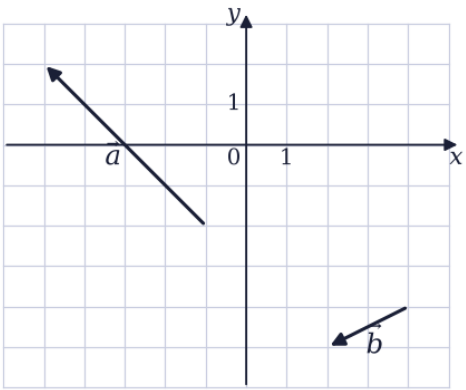
1 В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AH = 27$, $BH = 12$. Найдите CH.



Ответ: 18

Решение. Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, есть среднее пропорциональное отрезков гипотенузы: $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{27 \cdot 12} = 18$.

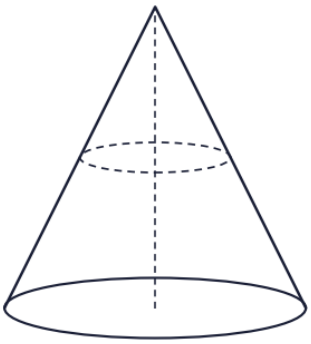
2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Ответ: 4

Решение. По рисунку $\vec{a}\,(-4;\ 4)$, $\vec{b}\,(-2;\ -1)$. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) = 4$.

3 Через середину высоты конуса параллельно основанию проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Объём меньшего конуса равен 13. Найдите объём исходного конуса.



Ответ: 104

Решение. Меньший конус подобен исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$, объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия: $V = 8 \cdot 13 = 104$.

4 В сборнике билетов по химии всего 50 билетов, в 45 из них встречается вопрос по теме «Углеводороды». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по этой теме.

Ответ: 0,9

Решение. $P = \frac{45}{50} = 0{,}9$.

5 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,15 для каждого автомата, автоматы работают независимо. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе закончится в обоих автоматах.

Ответ: 0,0225

Решение. События независимы: $P = 0{,}15^2 = 0{,}0225$.

6 Найдите корень уравнения $\log_3(2x+2) = \log_3(x-6) + 1$.

Ответ: 20

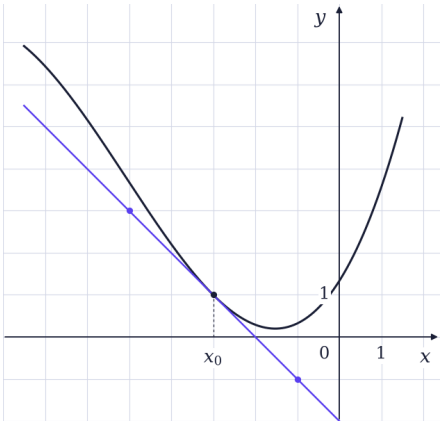
Решение. $1 = \log_3 3$, поэтому $2x + 2 = 3(x-6)$, откуда $x = 20$; при этом значении оба аргумента логарифмов положительны.

7 Найдите значение выражения $\log_{0,5} 9 - \log_{0,5} 36$.

Ответ: 2

Решение. $\log_{0,5} 9 - \log_{0,5} 36 = \log_{0,5} \dfrac{9}{36} = \log_{0,5} 0{,}25 = 2.$

8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: -1

Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Касательная проходит через точки $(-5;\ 3)$ и $(-1;\ -1)$: $k = \dfrac{-1-3}{-1-(-5)} = -1.$

9 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 24t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 27 метров?

Ответ: 1,2

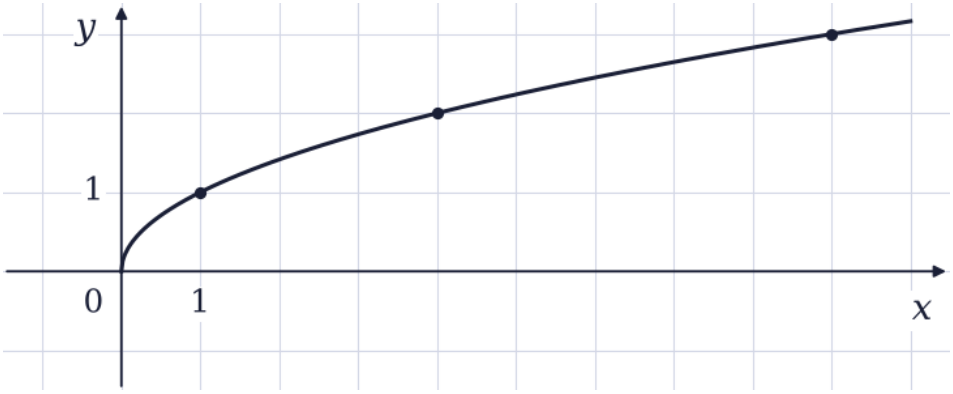
Решение. $h(t) \geqslant 27 \iff 5t^2 - 24t + 27 \leqslant 0 \iff 1{,}8 \leqslant t \leqslant 3$. Мяч находится не ниже 27 м в течение $3 - 1{,}8 = 1{,}2$ с.

10 Смешав 70-процентный и 75-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 50-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 80-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 75-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 70-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: 10

Решение. Пусть x кг — масса 70-процентного раствора, y кг — 75-процентного. Тогда $0{,}7x + 0{,}75y = 0{,}5(x + y + 10)$ и $0{,}7x + 0{,}75y + 8 = 0{,}75(x + y + 10)$. Вычитая, получим $x + y + 10 = 32$, откуда $x = 10$, $y = 12$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(16)$.



Ответ: 4

Решение. График проходит через точку $(9;\ 3)$: $3 = k\sqrt{9}$, $k = 1$. $f(16) = 1 \cdot \sqrt{16} = 4$.

12 Найдите наибольшее значение функции y = $(x - 1)^3 - 12(x - 1) + 22$ на отрезке [-3; 3].

Ответ: 38

Решение. Производная $y' = 3((x - 1)^2 - 4)$; критические точки x = -1, x = 3. На концах отрезка y(-3) = 6, y(3) = 6. Во внутренней критической точке y(-1) = 38. Наибольшее значение: 38.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x - 3\cos(\pi + x) = 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; **б)** $\frac{\pi}{3}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos(\pi + x) = -\cos x$, а $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Уравнение принимает вид

$$\left(2\cos^2 x - 1\right) + 3\cos x = 1 \iff 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0.$$

Отсюда $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -2$. Уравнение $\cos x = -2$ корней не имеет, так как $|-2| > 1$.

Если $\cos x = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$0 \leqslant \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \leqslant \dfrac{3\pi}{2} \iff -\dfrac{1}{6} \leqslant k \leqslant \dfrac{7}{12}, k \in \{0\}$: $x = \dfrac{\pi}{3}$.
$0 \leqslant -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant \dfrac{3\pi}{2} \iff \dfrac{1}{6} \leqslant n \leqslant \dfrac{11}{12}$: целых решений нет.
Ответ: а) $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{\pi}{3}$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 4 на ребре CC_1 отмечена точка M так, что M — середина ребра CC_1.

а) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости ACC_1.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью BDM.

Ответ: б) $4\sqrt{6}$

Решение. а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD \perp AC$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1 \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, значит, $BD \perp (ACC_1)$. Плоскость BDM проходит через прямую BD, перпендикулярную плоскости ACC_1, поэтому плоскости BDM и ACC_1 перпендикулярны.

б) Точка M лежит на ребре CC_1, поэтому плоскость BDM пересекает грани куба по отрезкам BD, BM и DM, и сечение — треугольник BDM. Пусть O — центр квадрата $ABCD$; прямая OM лежит в плоскости ACC_1, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$, и OM — высота треугольника BDM. $OC = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}, CM = 2, OM = \sqrt{OC^2 + CM^2} = \sqrt{8+4} = 2\sqrt{3}, BD = 4\sqrt{2}$. $S_{BDM} = \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{6}$.

Ответ: б) $4\sqrt{6}$.

15 Решите неравенство

$$\frac{9^x - 10 \cdot 3^x + 9}{\log_3(x+2)} \geqslant 0.$$

Ответ: $(-1;\ 0] \cup [2;\ +\infty)$

Решение. Область допустимых значений: $x + 2 > 0$ и $\log_3(x+2)\ /\ 0$, то есть $x > -2$, $x\ /\ = -1$.

Числитель раскладывается на множители: $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = (3^x - 1)(3^x - 9)$.

Функции $y = 3^t$ и $y = \log_3 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак $3^x - 1$ совпадает со знаком x, знак $3^x - 9$ — со знаком $x - 2$, знак $\log_3(x+2) = \log_3(x+2) - \log_3 1$ — со знаком $x + 1$.

Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{x(x-2)}{x+1} \geqslant 0, \quad x > -2.$$

Метод интервалов: на $(-2;\ -1)$ дробь отрицательна; на $(-1;\ 0)$ дробь положительна; на $(0;\ 2)$ дробь отрицательна; на $(2;\ +\infty)$ дробь положительна; в точках $x = 0$, $x = 2$ числитель равен

нулю.
Ответ: $(-1;\,0]\cup[2;\,+\infty)$.

16 В июле 2029 года планируется взять кредит в банке на сумму 1 650 000 рублей на 6 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Сколько рублей составит общая сумма выплат по кредиту?

Ответ: 2 227 500

Решение. Пусть $S=1\,650\,000$ руб. Долг ежегодно уменьшается на $\dfrac{S}{6}$. Проценты за все годы: $0{,}1S\left(1+\dfrac{5}{6}+\ldots+\dfrac{1}{6}\right)=0{,}1S\cdot\dfrac{7}{2}=577\,500$. Общая сумма выплат: $1\,650\,000+577\,500=2\,227\,500$.

17 Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Прямая касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B.
а) Докажите, что угол AKB прямой.
б) Найдите AK, если радиусы окружностей равны 64 и 36.

Ответ: б) $\dfrac{384}{5}$

Решение. а) Проведём через точку K общую касательную к окружностям; пусть она пересекает прямую AB в точке M. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны: $MA=MK$ и $MB=MK$. Значит, M — середина AB и $MK=\dfrac{AB}{2}$, то есть медиана треугольника AKB равна половине стороны AB. Поэтому $\angle AKB=90^\circ$.
б) Из прямоугольной трапеции O_1ABO_2: $AB^2=O_1O_2^2-(O_1A-O_2B)^2=(64+36)^2-(64-36)^2=4\cdot64\cdot36$, $AB=96$, $MA=MK=48$. Точки O_1 и M равноудалены от концов отрезка AK, поэтому $O_1M\perp AK$, и AK вдвое больше высоты прямоугольного треугольника O_1AM, проведённой из вершины A: $O_1M=\sqrt{64^2+2304}=80$, $AK=2\cdot\dfrac{O_1A\cdot AM}{O_1M}=2\cdot\dfrac{64\cdot48}{80}=\dfrac{384}{5}$.
Ответ: б) $\dfrac{384}{5}$.

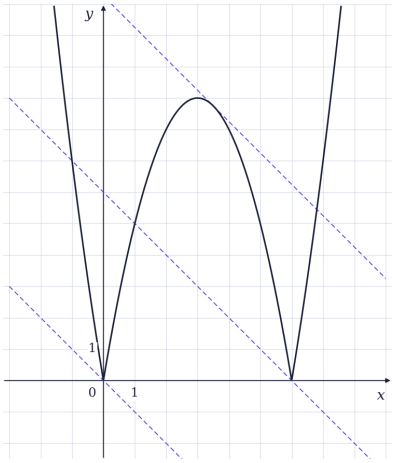
18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-6x\right|=-x+a$$

имеет ровно 4 различных корня.

Ответ: $a \in (6;\ 12{,}25)$

Решение. Число корней уравнения равно числу общих точек графика $y = \left|x^2 - 6x\right|$ и прямой $y = -x + a$ (угловой коэффициент -1). Поскольку $x^2 - 6x = x(x - 6)$, график состоит из трёх частей: ветви параболы $y = x^2 - 6x$ при $x \leqslant 0$, ветви той же параболы при $x \geqslant 6$ и дуги $y = -(x^2 - 6x)$ при $0 < x < 6$.



Граничные положения прямой. Прямая проходит через точку $(0;\ 0)$ при $a = 0$ и через точку $(6;\ 0)$ при $a = 6$.

Касание с дугой: уравнение $-(x^2 - 6x) = -x + a$, то есть $x^2 - 7x + a = 0$, имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю: $a = 12{,}25$; точка касания $x = 3{,}5$ лежит в интервале $(0;\ 6)$.

Прямая с угловым коэффициентом -1 касается параболы $y = x^2 - 6x$ в точке $x = 2{,}5$, которая не принадлежит крайним ветвям, поэтому касания с ветвями нет.

Перемещая прямую снизу вверх (с ростом a) и подсчитывая общие точки с графиком, получаем:

a	$a < 0$	0	$(0;\ 6)$	6	$(6;\ 12{,}25)$	$12{,}25$	$a > 12{,}25$
Число корней	0	1	2	3	4	3	2

Ровно 4 корня получается при $a \in (6;\ 12{,}25)$.

Ответ: $a \in (6;\ 12{,}25)$.

19

Из чисел 1, 2, …, 12 выбирают несколько различных. Среди выбранных не должно быть двух с суммой 13.

а) Можно ли выбрать 6 чисел?

б) Можно ли выбрать 7 чисел?

в) Сколько чисел можно выбрать самое большее?

Ответ: а) да; б) нет; в) 6

Решение. Разобьём числа на шесть пар: (1,12), (2,11), (3,10), (4,9), (5,8), (6,7). В каждой паре сумма 13, поэтому из каждой можно взять не больше одного числа: всего не более шести. Шесть достижимы набором 1, 2, 3, 4, 5, 6. Это одновременно доказывает ответы а), б) и в).