Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 25 и 13 соответственно, а боковая сторона равна 10. Найдите площадь трапеции.



Ответ: 152

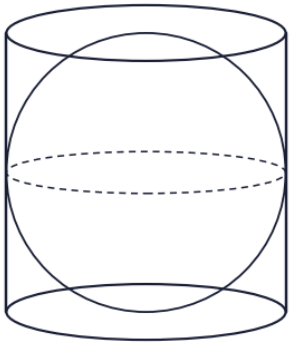
Решение. Проекция боковой стороны на большее основание равна $\dfrac{25-13}{2}=6$, высота $h=\sqrt{10^2-6^2}=8$, $S=\dfrac{25+13}{2}\cdot 8=152$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(-5;\ -3)$ и $\vec{b}\,(5;\ -2)$. Найдите длину вектора $2\vec{a}+3\vec{b}$.

Ответ: 13

Решение. $2\vec{a}+3\vec{b}=(5;\ -12)$, $|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{25+144}=13$.

3 В цилиндр вписан шар: шар касается обоих оснований цилиндра и его боковой поверхности. Объём цилиндра равен 27. Найдите объём шара.



Ответ: 18

Решение. Высота цилиндра равна диаметру шара: $V_{\text{цил}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 27$, откуда $\pi r^3 = 13{,}5$; $V_{\text{шара}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 18$.

4 В среднем из 2000 блендеров, поступивших в продажу, 5 неисправны. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля прибор исправен.

Ответ: 0,9975

Решение. $P = \dfrac{2000 - 5}{2000} = 0{,}9975$.

5 Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,3, второго — 0,4. Найдите вероятность того, что в мишень попадёт ровно один стрелок.

Ответ: 0,46

Решение. Ровно одно попадание: первый попал, второй нет, или наоборот. $P = 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}46$.

6 Найдите корень уравнения $\log_7(18 - x) = 1$.

Ответ: 11

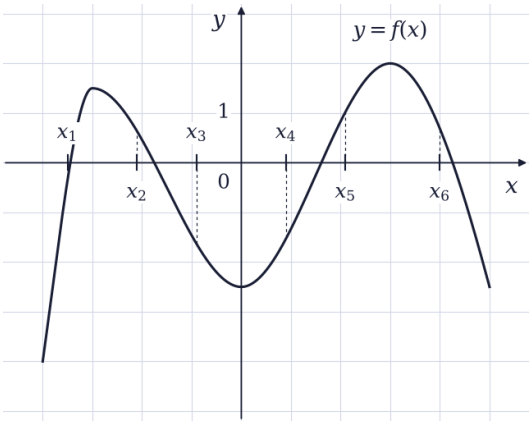
Решение. По определению логарифма $18 - x = 7^1 = 7$, откуда $x = 11$. Аргумент логарифма положителен.

7 Найдите значение выражения $3\operatorname{tg} 53^\circ \cdot \operatorname{tg} 143^\circ$.

Ответ: -3

Решение. $\operatorname{tg} 143^\circ = -\operatorname{ctg} 53^\circ$, а $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, поэтому выражение равно -3.

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечено 6 точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



Ответ: 3

Решение. Производная положительна в тех точках, где функция возрастает. По графику таких точек 3.

9 Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 10$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 2$ м/с². За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 9 метров. Ответ дайте в секундах.

Ответ: 1

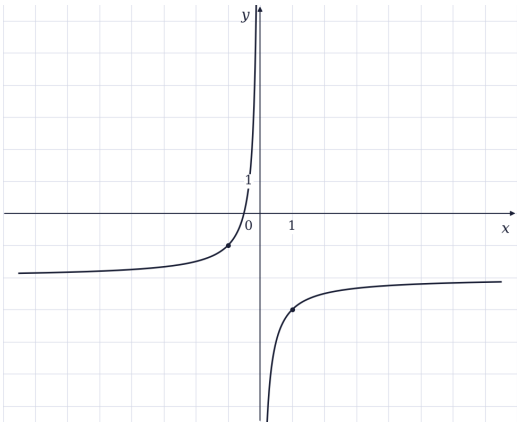
Решение. $10t - \dfrac{2t^2}{2} = 9 \iff t^2 - 10t + 9 = 0$. Корни: $t = 1$ и $t = 9$. Торможение длится $\dfrac{v_0}{a} = 5$ с, поэтому подходит $t = 1$.

10 Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 96 литров она заполняет на 4 минуты дольше, чем вторая труба?

Ответ: 6

Решение. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{96}{x} - \dfrac{96}{x+2} = 4$, положительный корень $x = 6$.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{k}{x+a}+b$, где числа a, b и k — целые. Найдите значение $f(-10)$.



Ответ: -1,9

Решение. Асимптоты графика: $x=0$ и $y=-2$, поэтому $a=0$, $b=-2$. По точке $(-1;\ -1)$: $-1=\dfrac{k}{-1}-2$, откуда $k=-1$. $f(-10)=\dfrac{-1}{-10}-2=-1{,}9$.

12 Найдите точку максимума функции y = 2ln x − x + 19.

Ответ: 2

Решение. Область определения: x > 0. Производная y′ = 2/x − 1. Она положительна при 0 < x < 2 и отрицательна при x > 2. Точка максимума x = 2.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x+4\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=-5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\ -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$**; б)** $-\dfrac{7\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x$, а $\cos 2x=1-2\sin^2 x$.

Уравнение принимает вид

$$\left(1-2\sin^2 x\right)-4\sin x=-5\ \Leftrightarrow\ \sin^2 x+2\sin x-3=0.$$

Отсюда $\sin x = 1$ или $\sin x = -3$. Уравнение $\sin x = -3$ корней не имеет, так как $|-3| > 1$.
Если $\sin x = 1$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\ -\dfrac{5\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$-4\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant -\dfrac{5\pi}{2} \iff -\dfrac{9}{4} \leqslant k \leqslant -\dfrac{3}{2}, k \in \{-2\}$: $x = -\dfrac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{2}$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 20 на ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 3 : 2$.

а) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости ACC_1.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью BDM.

Ответ: б) $40\sqrt{43}$

Решение. а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD \perp AC$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1 \perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, значит, $BD \perp (ACC_1)$. Плоскость BDM проходит через прямую BD, перпендикулярную плоскости ACC_1, поэтому плоскости BDM и ACC_1 перпендикулярны.

б) Точка M лежит на ребре CC_1, поэтому плоскость BDM пересекает грани куба по отрезкам BD, BM и DM, и сечение — треугольник BDM. Пусть O — центр квадрата $ABCD$; прямая OM лежит в плоскости ACC_1, поэтому по пункту а) $OM \perp BD$, и OM — высота треугольника BDM. $OC = \dfrac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$, $CM = 12$, $OM = \sqrt{OC^2 + CM^2} = \sqrt{200 + 144} = 2\sqrt{86}$, $BD = 20\sqrt{2}$. $S_{BDM} = \dfrac{1}{2} \cdot 20\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{86} = 40\sqrt{43}$.

Ответ: б) $40\sqrt{43}$.

15 Решите неравенство $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 \geq 0$.

Ответ: $(-\infty;\ 1] \cup [2;\ +\infty)$

Решение. $t = 3^x > 0$: $t^2 - 12t + 27 \geq 0 \iff (t-3)(t-9) \geq 0 \iff t \leq 3$ или $t \geq 9$, то есть $x \leq 1$ или $x \geq 2$.

16 В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на сумму 690 000 рублей на 3 года. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Сколько рублей составит общая сумма выплат по кредиту?

Ответ: 1 035 000

Решение. Пусть $S = 690\,000$ руб. Долг ежегодно уменьшается на $\dfrac{S}{3}$. Проценты за все годы: $0{,}25S\left(1 + \dfrac{2}{3} + \ldots + \dfrac{1}{3}\right) = 0{,}25S \cdot \dfrac{4}{2} = 345\,000$. Общая сумма выплат: $690\,000 + 345\,000 = 1\,035\,000$.

17 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD.
а) Докажите, что $AB = 2AD$.
б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AK = 4$, $BK = 3$.

Ответ: б) 12

Решение. а) Прямые AB и CD параллельны, поэтому $\angle AKD = \angle KAB$ как накрест лежащие углы. AK — биссектриса, поэтому $\angle KAB = \angle KAD$. Значит, $\angle AKD = \angle KAD$, и треугольник ADK равнобедренный: $DK = AD$. Аналогично треугольник BCK равнобедренный: $CK = BC = AD$. Тогда $AB = CD = DK + KC = 2AD$.
б) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к стороне AB, равна 180°, поэтому $\angle KAB + \angle KBA = 90^\circ$ и $\angle AKB = 90^\circ$. Треугольник ABK и параллелограмм имеют общее основание AB и одинаковую высоту (расстояние между прямыми AB и CD), поэтому $S_{ABCD} = 2S_{ABK} = AK \cdot BK$. $S_{ABCD} = 4 \cdot 3 = 12$.
Ответ: б) 12.

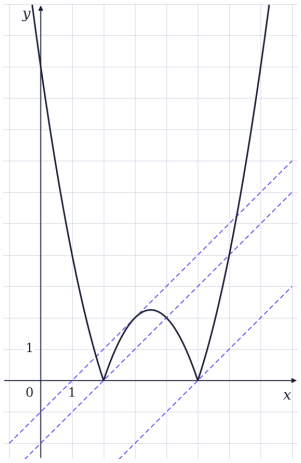
18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 - 7x + 10\right| = x + a$$

имеет ровно 2 различных корня.

Ответ: $a \in (-5;\ -2) \cup (-1;\ +\infty)$

Решение. Число корней уравнения равно числу общих точек графика $y = \left|x^2 - 7x + 10\right|$ и прямой $y = x + a$ (угловой коэффициент 1). Поскольку $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$, график состоит из трёх частей: ветви параболы $y = x^2 - 7x + 10$ при $x \leqslant 2$, ветви той же параболы при $x \geqslant 5$ и дуги $y = -(x^2 - 7x + 10)$ при $2 < x < 5$.



Граничные положения прямой. Прямая проходит через точку $(2;\ 0)$ при $a=-2$ и через точку $(5;\ 0)$ при $a=-5$.

Касание с дугой: уравнение $-(x^2-7x+10)=x+a$, то есть $x^2-6x+10+a=0$, имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю: $a=-1$; точка касания $x=3$ лежит в интервале $(2;\ 5)$.

Прямая с угловым коэффициентом 1 касается параболы $y=x^2-7x+10$ в точке $x=4$, которая не принадлежит крайним ветвям, поэтому касания с ветвями нет.

Перемещая прямую снизу вверх (с ростом a) и подсчитывая общие точки с графиком, получаем:

a	$a<-5$	-5	$(-5;\ -2)$	-2	$(-2;\ -1)$	-1	$a>-1$
Число корней	0	1	2	3	4	3	2

Ровно 2 корня получается при $a\in(-5;\ -2)\cup(-1;\ +\infty)$.

Ответ: $a\in(-5;\ -2)\cup(-1;\ +\infty)$.

19

Два различных натуральных числа имеют сумму 60.

а) Может ли их НОД равняться 20?

б) Может ли их НОД равняться 30?

в) Найдите наибольший возможный НОД.

Ответ: а) да; б) нет; в) 20

Решение. Пусть числа равны da и db, где d — их НОД, а и b — различные натуральные числа. Тогда 60=d(a+b), причём a+b≥3.

а) Числа 20 и 40 подходят. б) При d=30 сумма a+b=2, что возможно только при a=b=1, а числа должны различаться.

в) Из d≤60/3=20 и примера из пункта а) получаем максимум 20.