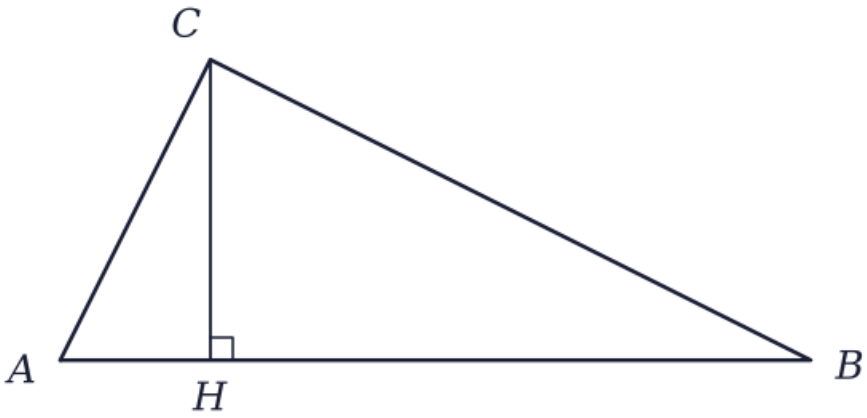
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $AH = 3$, $BH = 12$. Найдите CH.



Ответ: 6

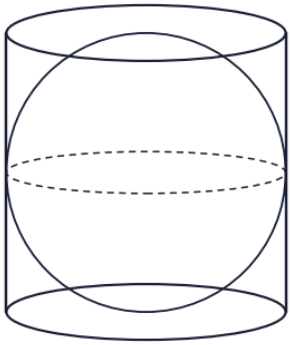
Решение. Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, есть среднее пропорциональное отрезков гипотенузы: $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{3 \cdot 12} = 6$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(3;\ 3)$ и $\vec{b}\,(-3;\ 4)$. Найдите длину вектора $4\vec{a} - \vec{b}$.

Ответ: 17

Решение. $4\vec{a} - \vec{b} = (15;\ 8)$, $|4\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{225 + 64} = 17$.

3 В цилиндр вписан шар: шар касается обоих оснований цилиндра и его боковой поверхности. Объём цилиндра равен 60. Найдите объём шара.



Ответ: 40

Решение. Высота цилиндра равна диаметру шара: $V_{\text{цил}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 60$, откуда $\pi r^3 = 30$; $V_{\text{шара}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 40$.

4 В соревнованиях по толканию ядра участвуют 9 спортсменов из Финляндии, 9 спортсменов из Дании и 7 спортсменов из Швеции. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

Ответ: 0,28

Решение. Всего спортсменов $9 + 9 + 7 = 25$, $P = \dfrac{7}{25} = 0{,}28$.

5 Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,2, второго — 0,7. Найдите вероятность того, что в мишень попадёт ровно один стрелок.

Ответ: 0,62

Решение. Ровно одно попадание: первый попал, второй нет, или наоборот. $P = 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}62$.

6 Найдите корень уравнения $\sqrt{3 - 3x} = 6$.

Ответ: -11

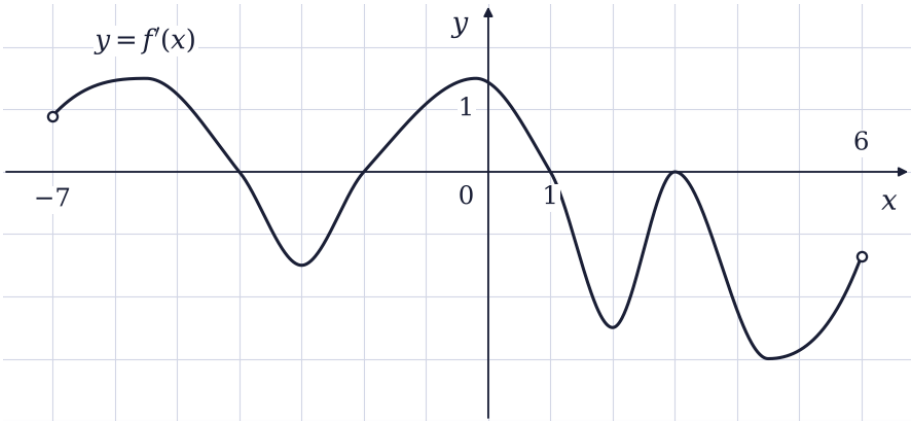
Решение. Возведём обе части в квадрат: $3 - 3x = 36$, $3x = -33$, $x = -11$.

7 Найдите значение выражения $15\,\mathrm{tg}\,70^\circ \cdot \mathrm{tg}\,160^\circ$.

Ответ: -15

Решение. $\operatorname{tg} 160^\circ = -\operatorname{ctg} 70^\circ$, а $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, поэтому выражение равно -15.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7;\ 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на этом интервале.



Ответ: 1

Решение. В точке минимума производная меняет знак с «−» на «+». Такая точка одна: $x = -2$.

9 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 3 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 24$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \dfrac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}5$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 9 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: 12

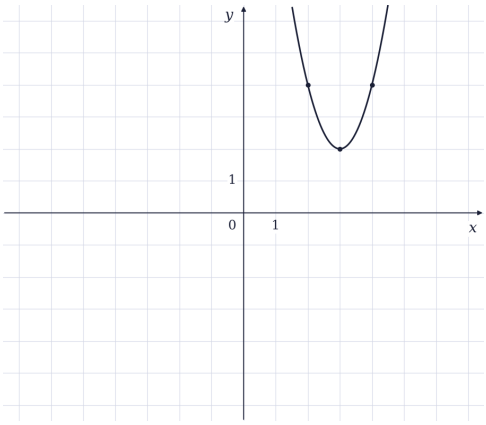
Решение. $RC = 3 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 6$. $9 = 1{,}5 \cdot 6 \cdot \log_2 \dfrac{24}{U}$, откуда $\log_2 \dfrac{24}{U} = 1$, $U = \dfrac{24}{2} = 12$.

10 Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 360 литров она заполняет на 3 минуты дольше, чем вторая труба?

Ответ: 20

Решение. Пусть x л/мин — производительность первой трубы. $\dfrac{360}{x} - \dfrac{360}{x+4} = 3$, положительный корень $x = 20$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-10)$.



Ответ: 340

Решение. Вершина параболы — точка $(3;\ 2)$, поэтому $f(x) = a(x-3)^2 + 2$. По точке $(4;\ 4)$: $a = 2$. $f(-10) = 2 \cdot (-10-3)^2 + 2 = 340$.

12 Найдите точку максимума функции $y = x^2 e^{2-x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

Ответ: 2

Решение. Производная $y' = e^{2-x}x(2-x)$. При $0 < x < 2$ она положительна, при $x > 2$ отрицательна. Значит, точка максимума $x = 2$.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $\cos 2x + 6\cos(\pi - x) = -1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$**; б)** $\dfrac{5\pi}{2};\ \dfrac{7\pi}{2}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos(\pi - x) = -\cos x$, а $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Уравнение принимает вид

$$\left(2\cos^2 x - 1\right) - 6\cos x = -1 \iff \cos^2 x - 3\cos x = 0.$$

Отсюда $\cos x = 0$ или $\cos x = 3$. Уравнение $\cos x = 3$ корней не имеет, так как $|3| > 1$. Если $\cos x = 0$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после

деления на π получаем неравенства для k).

$2\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \pi k \leqslant \dfrac{7\pi}{2} \iff \dfrac{3}{2} \leqslant k \leqslant 3, k \in \{2, 3\}$: $x = \dfrac{5\pi}{2}, x = \dfrac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{5\pi}{2}; \dfrac{7\pi}{2}$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 10, а боковое ребро равно 12. Точка M — середина ребра AB.

а) Докажите, что прямая CM перпендикулярна плоскости ABB_1.

б) Найдите угол между прямой A_1C и плоскостью ABB_1.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \dfrac{5\sqrt{3}}{13}$

Решение. а) Треугольник ABC равносторонний, его медиана CM является высотой: $CM \perp AB$. Призма правильная, поэтому боковое ребро AA_1 перпендикулярно плоскости основания, и $AA_1 \perp CM$. Прямая CM перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB и AA_1 плоскости ABB_1, значит, $CM \perp (ABB_1)$.

б) По пункту а) M — проекция точки C на плоскость ABB_1, поэтому A_1M — проекция прямой A_1C, и искомый угол равен $\angle CA_1M$. $CM = \dfrac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$, $A_1M = \sqrt{AA_1^2 + AM^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$. В прямоугольном треугольнике CA_1M: $\operatorname{tg} \angle CA_1M = \dfrac{CM}{A_1M} = \dfrac{5\sqrt{3}}{13}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \dfrac{5\sqrt{3}}{13}$.

15 Решите неравенство $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 \leq 0$.

Ответ: $[4;\ 8]$

Решение. ОДЗ $x > 0$. $t = \log_2 x$: $t^2 - 5t + 6 \leq 0 \iff 2 \leq t \leq 3 \iff 4 \leq x \leq 8$.

16 В июле 2032 года планируется взять кредит в банке на 5 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите сумму кредита, если общая сумма выплат по кредиту составит 1 417 000 рублей. Ответ дайте в рублях.

Ответ: 1 090 000

Решение. Пусть S руб. — сумма кредита. Долг ежегодно уменьшается на $\frac{S}{5}$, проценты за все годы: $0{,}1S\left(1+\frac{4}{5}+\ldots+\frac{1}{5}\right)=0{,}1S\cdot\frac{6}{2}=0{,}3S$, общая сумма выплат $1{,}3S=1\,417\,000$, откуда $S=1\,090\,000$.

17 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD.

а) Докажите, что $AB=2AD$.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AD=\frac{15}{2}$, $AK=9$.

Ответ: б) 108

Решение. а) Прямые AB и CD параллельны, поэтому $\angle AKD=\angle KAB$ как накрест лежащие углы. AK — биссектриса, поэтому $\angle KAB=\angle KAD$. Значит, $\angle AKD=\angle KAD$, и треугольник ADK равнобедренный: $DK=AD$. Аналогично треугольник BCK равнобедренный: $CK=BC=AD$. Тогда $AB=CD=DK+KC=2AD$.
б) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к стороне AB, равна 180°, поэтому $\angle KAB+\angle KBA=90^\circ$ и $\angle AKB=90^\circ$. Треугольник ABK и параллелограмм имеют общее основание AB и одинаковую высоту (расстояние между прямыми AB и CD), поэтому $S_{ABCD}=2S_{ABK}=AK\cdot BK$. По пункту а) $AB=2AD=15$. Из прямоугольного треугольника ABK: $BK=\sqrt{AB^2-AK^2}=\sqrt{15^2-9^2}=12$. $S_{ABCD}=9\cdot 12=108$.
Ответ: б) 108.

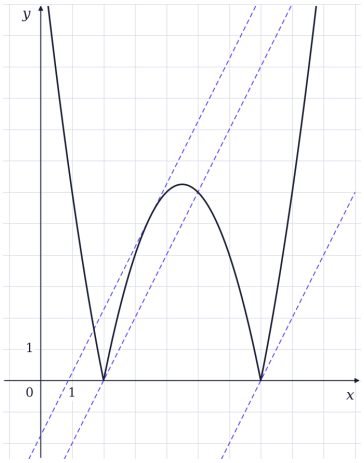
18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-9x+14\right|=2x+a$$

имеет ровно 2 различных корня.

Ответ: $a\in(-14;\,-4)\cup(-1{,}75;\,+\infty)$

Решение. Число корней уравнения равно числу общих точек графика $y=\left|x^2-9x+14\right|$ и прямой $y=2x+a$ (угловой коэффициент 2). Поскольку $x^2-9x+14=(x-2)(x-7)$, график состоит из трёх частей: ветви параболы $y=x^2-9x+14$ при $x\leqslant 2$, ветви той же параболы при $x\geqslant 7$ и дуги $y=-(x^2-9x+14)$ при $2<x<7$.



Граничные положения прямой. Прямая проходит через точку $(2;\ 0)$ при $a = -4$ и через точку $(7;\ 0)$ при $a = -14$.

Касание с дугой: уравнение $-(x^2 - 9x + 14) = 2x + a$, то есть $x^2 - 7x + 14 + a = 0$, имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю: $a = -1{,}75$; точка касания $x = 3{,}5$ лежит в интервале $(2;\ 7)$.

Прямая с угловым коэффициентом 2 касается параболы $y = x^2 - 9x + 14$ в точке $x = 5{,}5$, которая не принадлежит крайним ветвям, поэтому касания с ветвями нет.

Перемещая прямую снизу вверх (с ростом a) и подсчитывая общие точки с графиком, получаем:

a	$a < -14$	-14	$(-14;\ -4)$	-4	$(-4;\ -1{,}75)$	$-1{,}75$	$a > -1{,}75$
Число корней	0	1	2	3	4	3	2

Ровно 2 корня получается при $a \in (-14;\ -4) \cup (-1{,}75;\ +\infty)$.

Ответ: $a \in (-14;\ -4) \cup (-1{,}75;\ +\infty)$.

19

Натуральное число имеет ровно 12 положительных делителей.

а) Подходит ли число 72?

б) Подходит ли число 36?

в) Найдите наименьшее такое число.

Ответ: а) да; б) нет; в) 60

Решение. а) $72=2^3\cdot3^2$, поэтому число делителей равно (3+1)(2+1)=12. б) $36=2^2\cdot3^2$ имеет 9 делителей. в) Возможные разбиения 12 на множители больше 1 задают показатели простых: (11), (5,1), (3,2), (2,1,1). Для минимального числа большие показатели ставят у меньших простых. Получаем соответственно $2^{11}=2048$, $2^5\cdot3=96$, $2^3\cdot3^2=72$ и $2^2\cdot3\cdot5=60$. Наименьшее — 60.