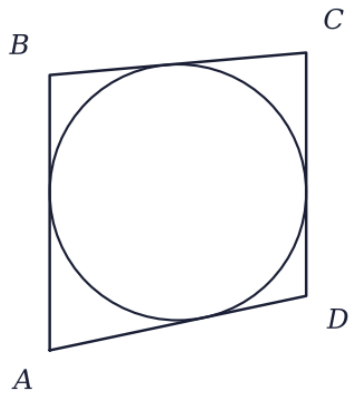
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки.

1 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 15$, $CD = 15$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



Ответ: 60

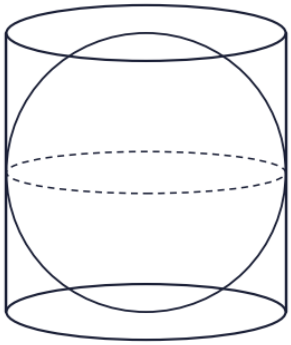
Решение. В описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны: $BC + AD = AB + CD = 30$. Периметр равен $2 \cdot 30 = 60$.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(2;\ 1)$ и $\vec{b}\,(-2;\ -7)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: -11

Решение. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-7) = -11$.

3 В цилиндр вписан шар: шар касается обоих оснований цилиндра и его боковой поверхности. Площадь полной поверхности цилиндра равна 78. Найдите площадь поверхности шара.



Ответ: 52

Решение. Высота цилиндра равна диаметру шара: $h = 2r$. $S_{\text{цил}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2 = 78$, откуда $\pi r^2 = 13$; $S_{\text{шара}} = 4\pi r^2 = 52$.

4 В сборнике билетов по биологии всего 20 билетов, в 9 из них встречается вопрос по теме «Генетика». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по этой теме.

Ответ: 0,55

Решение. Билетов без вопроса по этой теме $20 - 9 = 11$, $P = \dfrac{11}{20} = 0{,}55$.

5 В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,15 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Ответ: 0,9775

Решение. Оба автомата неисправны с вероятностью $0{,}15^2 = 0{,}0225$. Хотя бы один исправен: $1 - 0{,}0225 = 0{,}9775$.

6 Найдите корень уравнения $\sqrt{94 - 9x} = 7$.

Ответ: 5

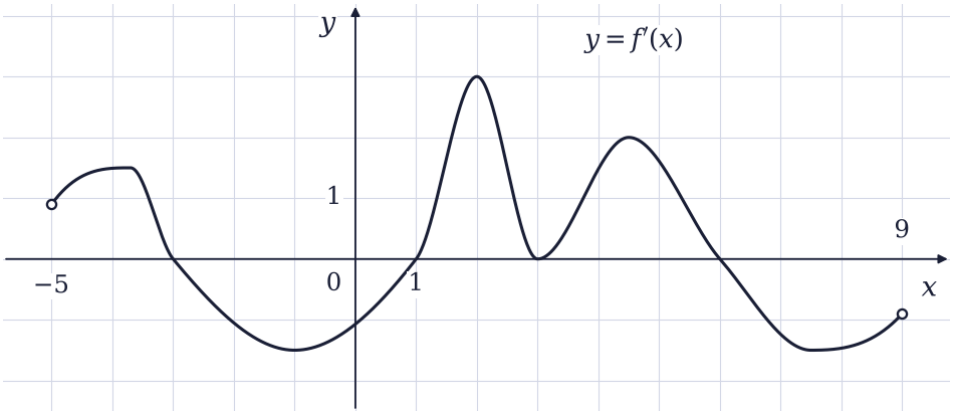
Решение. Возведём обе части в квадрат: $94 - 9x = 49$, $9x = 45$, $x = 5$.

7 Найдите значение выражения $\log_{0,2} 15 - \log_{0,2} 3$.

Ответ: -1

Решение. $\log_{0,2} 15 - \log_{0,2} 3 = \log_{0,2} \dfrac{15}{3} = \log_{0,2} 5 = -1.$

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;\ 9)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: 5

Решение. Функция возрастает там, где $f'(x) > 0$ (касание оси без смены знака промежуток не разрывает): $(-5;\ -3)$, $(1;\ 6)$. Наибольшая длина равна 5.

9 Масса радиоактивного изотопа в образце уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа (в мг), t — время, прошедшее от начального момента (в минутах), T — период полураспада (в минутах). Начальная масса изотопа $m_0 = 640$ мг, период полураспада $T = 4$ мин. Через сколько минут масса изотопа станет равной 80 мг?

Ответ: 12

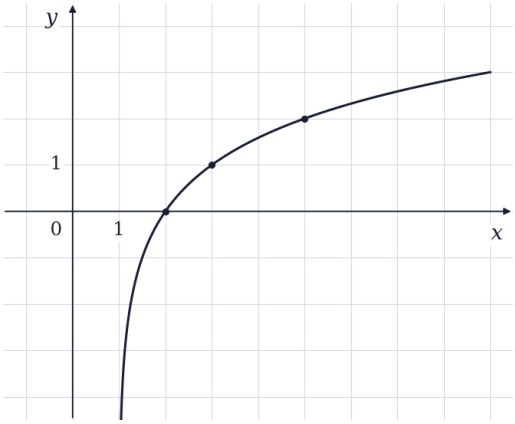
Решение. $640 \cdot 2^{-t/4} = 80 \iff 2^{-t/4} = 2^{-3} \iff t = 12.$

10 Два велосипедиста одновременно отправились в 160-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 6 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 6 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 10

Решение. Пусть v — скорость второго. $\dfrac{160}{v} - \dfrac{160}{v+6} = 6 \iff 6v^2 + 36v - 960 = 0,$ положительный корень $v = 10$.

11 На рисунке изображён график функции $f(x)=\log_a(x+b)$. Найдите $f(17)$.



Ответ: 4

Решение. $\log_a(x+b)=0$ при $x+b=1$; график пересекает ось абсцисс в точке $x=2$, поэтому $b=-1$. По точке $(5;\ 2)$ находим $a=2$. $f(17)=\log_2 16=4$.

12 Найдите наименьшее значение функции y = x + 4/x + 13 на отрезке [1; 6].

Ответ: 17

Решение. На отрезке x > 0. Производная y′ = 1 − $4/x^2$ отрицательна при x < 2 и положительна при x > 2. Минимум достигается при x = 2; y(2) = 2 + 2 + 13 = 17.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите номер задания и полное обоснованное решение с ответом.

13 а) Решите уравнение $2\cos^2 x+3\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$**; б)** $-\frac{11\pi}{6}$

Решение. а) По формуле приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$, а $\cos^2 x=1-\sin^2 x$.

Уравнение принимает вид

$$2\left(1-\sin^2 x\right)-3\sin x=0\ \Leftrightarrow\ 2\sin^2 x+3\sin x-2=0.$$

Отсюда $\sin x=\frac{1}{2}$ или $\sin x=-2$. Уравнение $\sin x=-2$ корней не имеет, так как $|-2|>1$.

Если $\sin x=\frac{1}{2}$, то $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\dfrac{3\pi}{2}\right]$, с помощью двойных неравенств (после деления на π получаем неравенства для k).

$-3\pi \leqslant \dfrac{\pi}{6}+2\pi k \leqslant -\dfrac{3\pi}{2} \iff -\dfrac{19}{12} \leqslant k \leqslant -\dfrac{5}{6}, k\in\{-1\}$: $x=-\dfrac{11\pi}{6}$.

$-3\pi \leqslant \dfrac{5\pi}{6}+2\pi n \leqslant -\dfrac{3\pi}{2} \iff -\dfrac{23}{12} \leqslant n \leqslant -\dfrac{7}{6}$: целых решений нет.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{11\pi}{6}$.

14 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 6 на ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM:MC_1=1:2$.

а) Докажите, что плоскость BDM перпендикулярна плоскости ACC_1.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью BDM.

Ответ: б) $6\sqrt{11}$

Решение. а) Диагонали квадрата $ABCD$ перпендикулярны: $BD\perp AC$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$, поэтому $CC_1\perp BD$. Прямая BD перпендикулярна двум пересекающимся прямым AC и CC_1 плоскости ACC_1, значит, $BD\perp(ACC_1)$. Плоскость BDM проходит через прямую BD, перпендикулярную плоскости ACC_1, поэтому плоскости BDM и ACC_1 перпендикулярны.

б) Точка M лежит на ребре CC_1, поэтому плоскость BDM пересекает грани куба по отрезкам BD, BM и DM, и сечение — треугольник BDM. Пусть O — центр квадрата $ABCD$; прямая OM лежит в плоскости ACC_1, поэтому по пункту а) $OM\perp BD$, и OM — высота треугольника BDM. $OC=\dfrac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$, $CM=2$, $OM=\sqrt{OC^2+CM^2}=\sqrt{18+4}=\sqrt{22}$, $BD=6\sqrt{2}$. $S_{BDM}=\dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot\sqrt{22}=6\sqrt{11}$.

Ответ: б) $6\sqrt{11}$.

15 Решите неравенство

$$\frac{9^x-10\cdot 3^x+9}{\log_5(x+4)}\leqslant 0.$$

Ответ: $(-4;\ -3)\cup[0;\ 2]$

Решение. Область допустимых значений: $x+4>0$ и $\log_5(x+4)\ /\ 0$, то есть $x>-4$, $x\ /\ =-3$.

Числитель раскладывается на множители: $9^x-10\cdot 3^x+9=(3^x-1)(3^x-9)$.

Функции $y=3^t$ и $y=\log_5 t$ возрастают, поэтому на ОДЗ знак 3^x-1 совпадает со знаком x, знак 3^x-9 — со знаком $x-2$, знак $\log_5(x+4)=\log_5(x+4)-\log_5 1$ — со знаком $x+3$.

Неравенство на ОДЗ равносильно

$$\frac{x(x-2)}{x+3}\leqslant 0,\quad x>-4.$$

Метод интервалов: на $(-4;\ -3)$ дробь отрицательна; на $(-3;\ 0)$ дробь положительна; на $(0;\ 2)$ дробь отрицательна; на $(2;\ +\infty)$ дробь положительна; в точках $x=0$, $x=2$ числитель равен нулю.
Ответ: $(-4;\ -3)\cup[0;\ 2]$.

16

В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на сумму 520 000 рублей на 8 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Сколько рублей составит общая сумма выплат по кредиту?

Ответ: 1 105 000

Решение. Пусть $S=520\,000$ руб. Долг ежегодно уменьшается на $\dfrac{S}{8}$. Проценты за все годы: $0{,}25S\left(1+\dfrac{7}{8}+\ldots+\dfrac{1}{8}\right)=0{,}25S\cdot\dfrac{9}{2}=585\,000$. Общая сумма выплат: $520\,000+585\,000=1\,105\,000$.

17

Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Прямая касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B.
а) Докажите, что угол AKB прямой.
б) Найдите площадь треугольника AKB, если радиусы окружностей равны 25 и 144.

Ответ: б) $\dfrac{432000}{169}$

Решение. а) Проведём через точку K общую касательную к окружностям; пусть она пересекает прямую AB в точке M. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны: $MA=MK$ и $MB=MK$. Значит, M — середина AB и $MK=\dfrac{AB}{2}$, то есть медиана треугольника AKB равна половине стороны AB. Поэтому $\angle AKB=90^\circ$.
б) Из прямоугольной трапеции O_1ABO_2: $AB^2=O_1O_2^2-(O_1A-O_2B)^2=(25+144)^2-(25-144)^2=4\cdot25\cdot144$, $AB=120$, $MA=MK=60$. Точки O_1 и M равноудалены от концов отрезка AK, поэтому $O_1M\perp AK$, и AK вдвое больше высоты прямоугольного треугольника O_1AM, проведённой из вершины A: $O_1M=\sqrt{25^2+3600}=65$, $AK=2\cdot\dfrac{O_1A\cdot AM}{O_1M}=2\cdot\dfrac{25\cdot60}{65}=\dfrac{600}{13}$. Аналогично $BK=2\cdot\dfrac{144\cdot60}{156}=\dfrac{1440}{13}$. $S_{AKB}=\dfrac{1}{2}\cdot AK\cdot BK=\dfrac{432000}{169}$.
Ответ: б) $\dfrac{432000}{169}$.

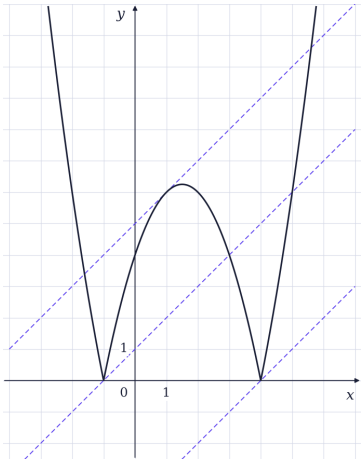
18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-3x-4\right|=x+a$$

имеет ровно 2 различных корня.

Ответ: $a\in(-4;\,1)\cup(5;\,+\infty)$

Решение. Число корней уравнения равно числу общих точек графика $y=\left|x^2-3x-4\right|$ и прямой $y=x+a$ (угловой коэффициент 1). Поскольку $x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$, график состоит из трёх частей: ветви параболы $y=x^2-3x-4$ при $x\leqslant -1$, ветви той же параболы при $x\geqslant 4$ и дуги $y=-(x^2-3x-4)$ при $-1<x<4$.



Граничные положения прямой. Прямая проходит через точку $(-1;\,0)$ при $a=1$ и через точку $(4;\,0)$ при $a=-4$.

Касание с дугой: уравнение $-(x^2-3x-4)=x+a$, то есть $x^2-2x-4+a=0$, имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю: $a=5$; точка касания $x=1$ лежит в интервале $(-1;\,4)$.

Прямая с угловым коэффициентом 1 касается параболы $y=x^2-3x-4$ в точке $x=2$, которая не принадлежит крайним ветвям, поэтому касания с ветвями нет.

Перемещая прямую снизу вверх (с ростом a) и подсчитывая общие точки с графиком, получаем:

a	$a<-4$	-4	$(-4;\,1)$	1	$(1;\,5)$	5	$a>5$
Число корней	0	1	2	3	4	3	2

Ровно 2 корня получается при $a\in(-4;\,1)\cup(5;\,+\infty)$.

Ответ: $a\in(-4;\,1)\cup(5;\,+\infty)$.

19 Пять различных натуральных чисел имеют сумму 36.

а) Может ли наибольшее число равняться 26?

б) Может ли наибольшее число равняться 9?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего числа.

Ответ: а) да; б) нет; в) 10

Решение. а) Подходит набор 1, 2, 3, 4, 26.

б) Пять различных натуральных чисел, не превосходящих 9, имеют сумму не больше $5+6+7+8+9=35$.

в) Следовательно, максимум не меньше 10. Набор 2, 7, 8, 9, 10 имеет сумму 36, так что граница достигается.